第1章 矢量分析

一、矢量和标量的定义

二、矢量的运算法则

三、矢量微分元：线元，面元，体元

四、标量场的梯度

五、矢量场的散度

六、矢量场的旋度

七、重要的场论公式

八、亥姆霍兹定理

一、矢量和标量的定义

1.**标量：** 只有大小，没有方向的物理量。

如：温度 T、长度 L 等

2.**矢量：** 不仅有大小，而且有方向的物理量。

如:力 $\vec{F}$、速度 $\vec{v}$、电场 $\vec{E}$ 等

矢量表示为： $\vec{A}=|\vec{A}|\hat{a}$

其中：$|\vec{A}|$ 为矢量的模，表示该矢量的大小。

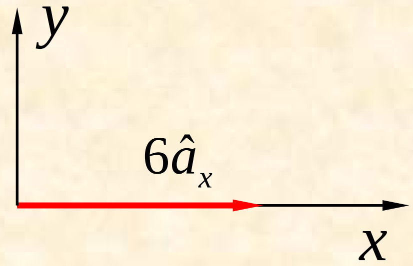
$\hat{a}$ 为单位矢量，表示矢量的方向，其大小为1。

所以：一个矢量就表示成矢量的模与单位矢量的乘积。

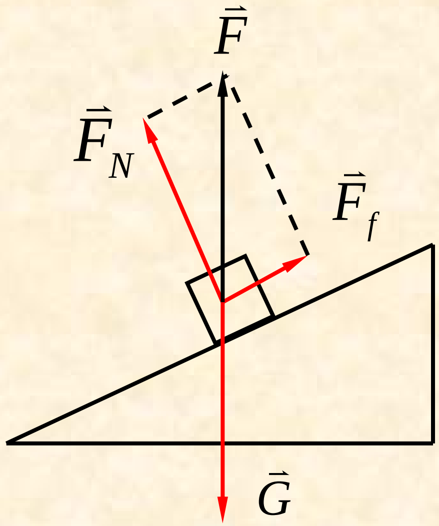
例1：在直角坐标系中，x 方向的大小为 6 的矢量如何表示?

$$6\hat{a}_x$$

图示法：



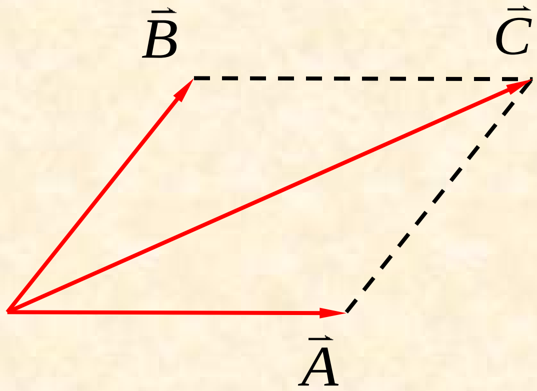
力的图示法：



$$\vec{F}=\vec{F}_N+\vec{F}_f$$

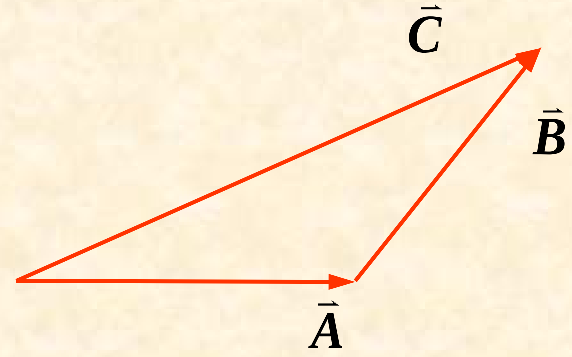
二、矢量的运算法则

1.**加法:** 矢量加法是矢量的几何和,服从平行四边形规则。



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\Rightarrow$$

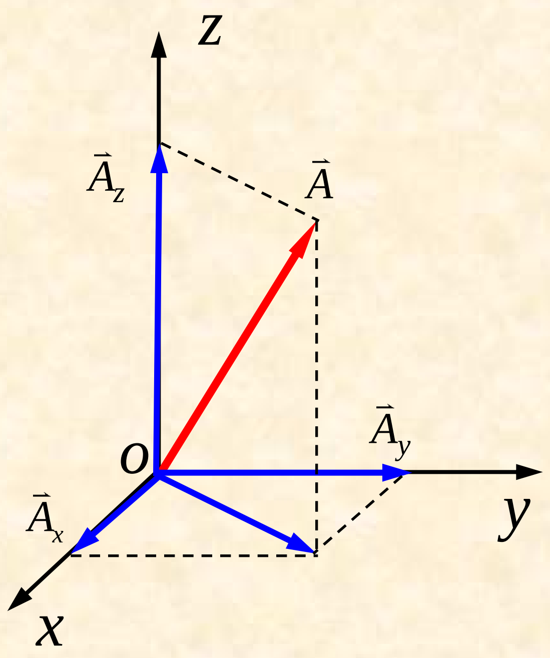


a.满足交换律: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

b.满足结合律: $(\vec{A} + \vec{B}) + (\vec{C} + \vec{D}) = (\vec{A} + \vec{C}) + (\vec{B} + \vec{D})$

在直角坐标系下的矢量表示:

三个方向的单位矢量用 $\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$ 表示。



根据矢量加法运算:

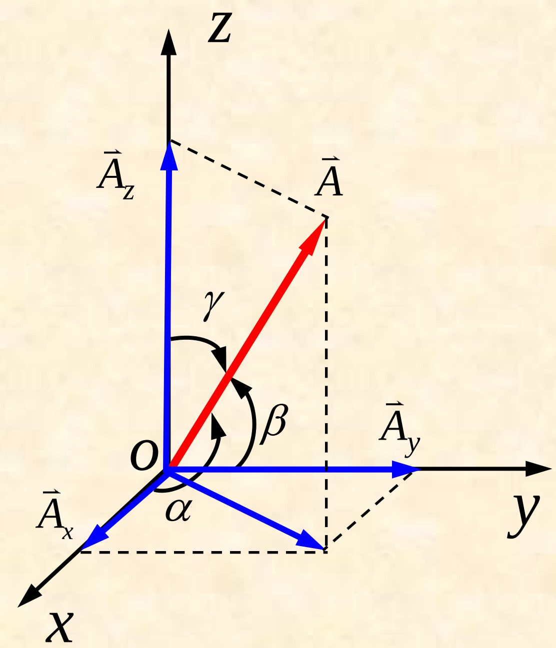
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

其中:

$$\vec{A}_x = A_x \hat{a}_x,\ \vec{A}_y = A_y \hat{a}_y,\ \vec{A}_z = A_z \hat{a}_z$$

所以: $\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$

矢量: $\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$



✧模的计算: $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

✧单位矢量:

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{|\vec{A}|}\hat{a}_x + \frac{A_y}{|\vec{A}|}\hat{a}_y + \frac{A_z}{|\vec{A}|}\hat{a}_z$$

$$= \cos\alpha\, \hat{a}_x + \cos\beta\, \hat{a}_y + \cos\gamma\, \hat{a}_z$$

✧方向角与方向余弦: $\alpha,\ \beta,\ \gamma$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

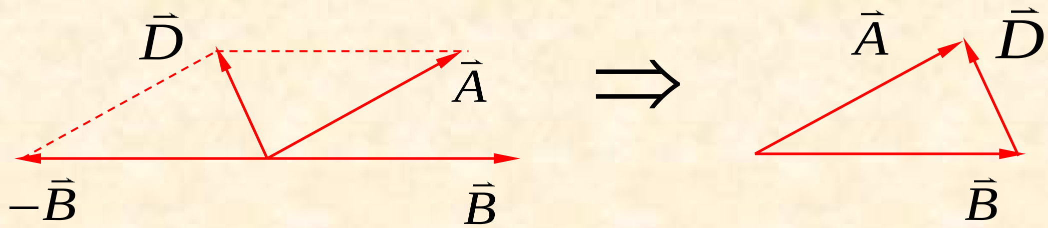
在直角坐标系中三个矢量加法运算:

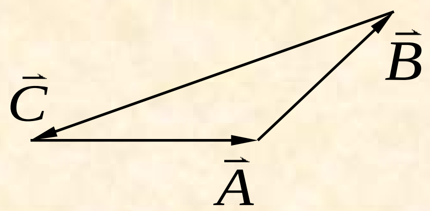
$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (A_x + B_x + C_x)\hat{a}_x + (A_y + B_y + C_y)\hat{a}_y + (A_z + B_z + C_z)\hat{a}_z$$

2.减法：换成加法运算

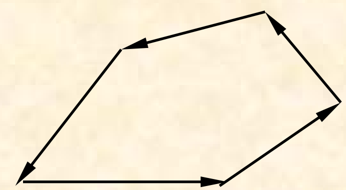
$$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

逆矢量：$\vec{B}$ 和 $(-\vec{B})$ 的模相等，方向相反，互为逆矢量。





$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$$



推论：

任意多个矢量首尾相连组成闭合多边形，其矢量和必为零。

在直角坐标系中两矢量的减法运算：

$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\hat{a}_x+(A_y-B_y)\hat{a}_y+(A_z-B_z)\hat{a}_z$$

3.乘法：

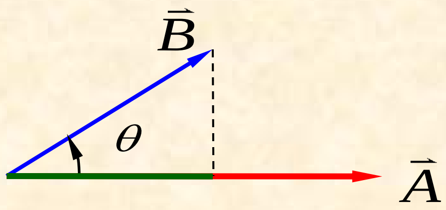
（1）标量与矢量的乘积：

$$k\vec{A} = k\,|\vec{A}|\,\hat{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} k > 0 \text{ 方向不变，大小为}|k|\text{倍} \\ k = 0 \\ k < 0 \text{ 方向相反，大小为}|k|\text{倍} \end{array} \right\}$$

（2）矢量与矢量乘积分两种定义

a. 标量积（点积）：

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\theta$$



✧两矢量的点积含义：

一矢量在另一矢量方向上的投影与另一矢量模的乘积，其结果是一标量。

推论1：满足交换律 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

推论2：满足分配律 $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

推论3：当两个非零矢量点积为零,则这两个矢量必正交。

•在直角坐标系中，已知三个坐标轴是相互正交的，即

$$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_y=0,\quad \hat{a}_x\cdot\hat{a}_z=0,\quad \hat{a}_y\cdot\hat{a}_z=0$$

$$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_x=1,\quad \hat{a}_y\cdot\hat{a}_y=1,\quad \hat{a}_z\cdot\hat{a}_z=1$$

有两矢量点积:

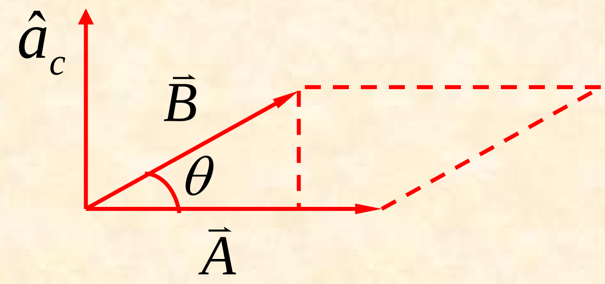
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z)\cdot(B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z)$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

•结论: 两矢量点积等于对应分量的乘积之和。

b.矢量积（叉积）：

$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta\,\hat{a}_c$$



•含义：

两矢量叉积，结果得一新矢量，其大小为这两个矢量组成的平行四边形的面积，方向为该面的法线方向，且三者符合右手螺旋法则。

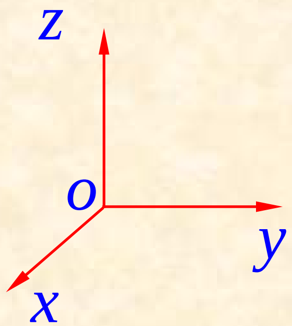
推论1：不服从交换律：$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$,　$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

推论2：服从分配律：$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

推论3：不服从结合律：$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

推论4：当两个非零矢量叉积为零，则这两个矢量必平行。

在直角坐标系中，两矢量的叉积运算如下：



$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z)\times(B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z)$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{a}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{a}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{a}_z$$

两矢量的叉积又可表示为：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

例2：设 $\vec{r}_1 = 2\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z,\quad \vec{r}_2 = \hat{a}_x + 3\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$

$\vec{r}_3 = -2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 3\hat{a}_z,\quad \vec{r}_4 = 3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$

求：$\vec{r}_4 = a\vec{r}_1 + b\vec{r}_2 + c\vec{r}_3$ 中的标量 a、b、c。

解：

$$3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$$

$$= a(2\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z) + b(\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - 2\hat{a}_z) + c(-2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 3\hat{a}_z)$$

$$= (2a + b - 2c)\hat{a}_x + (-a + 3b + c)\hat{a}_y + (a - 2b - 3c)\hat{a}_z$$

则：

$$\begin{cases} 2a + b - 2c = 3 \\ -a + 3b + c = 2 \\ a - 2b - 3c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -2 \\ b &= 1 \\ c &= -3 \end{aligned}$$

例3： 已知 $\vec{A}=2\hat{a}_x-6\hat{a}_y-3\hat{a}_z$ $\quad\vec{B}=4\hat{a}_x+3\hat{a}_y-\hat{a}_z$

求：确定垂直于 $\vec{A}$、$\vec{B}$所在平面的单位矢量。

解：已知 $\vec{A}\times\vec{B}$ 所得矢量垂直于 $\vec{A}$ 、$\vec{B}$ 所在平面。

$$\hat{a}_n=\pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ 2 & -6 & -3\\ 4 & 3 & -1\end{vmatrix}=15\hat{a}_x-10\hat{a}_y+30\hat{a}_z$$

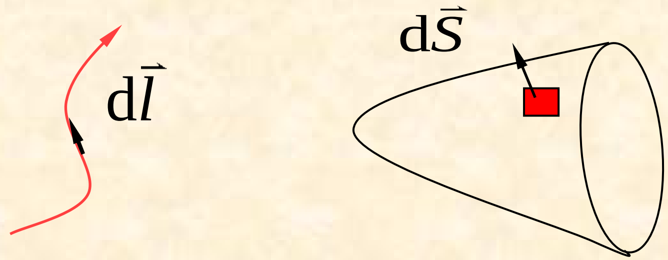
$$|\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{15^2+(-10)^2+30^2}=35$$

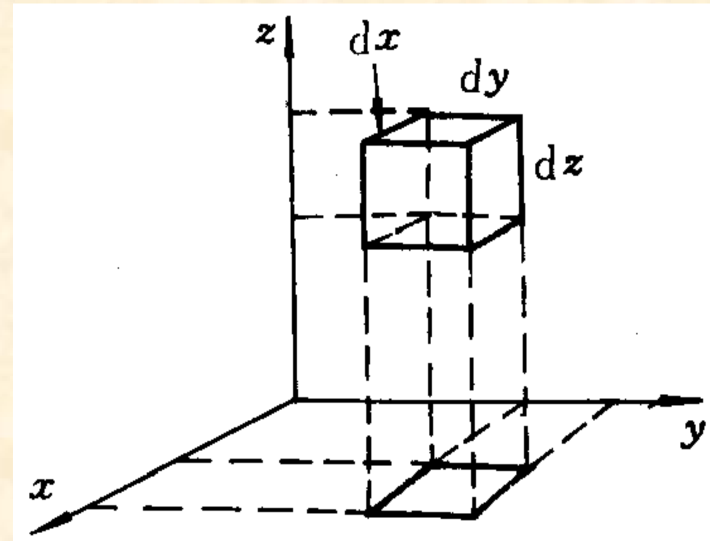
$$\hat{a}_n=\pm\frac{1}{7}(3\hat{a}_x-2\hat{a}_y+6\hat{a}_z)$$

三、矢量微分元：线元、面元、体元

例： $\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$, $\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$, $\int \rho \mathrm{d}V$

其中： $\mathrm{d}\vec{l}, \mathrm{d}\vec{S}$ 和 $\mathrm{d}V$ 称为微分元。





1. 直角坐标系

在直角坐标系中，坐标变量为(x,y,z)，如图，做一微分体元。

线元： $\mathrm{d}\vec{l}_x = \mathrm{d}x\hat{a}_x$

$\mathrm{d}\vec{l}_y = \mathrm{d}y\hat{a}_y$

$\mathrm{d}\vec{l}_z = \mathrm{d}z\hat{a}_z$

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}x\hat{a}_x + \mathrm{d}y\hat{a}_y + \mathrm{d}z\hat{a}_z$$

面元： $\mathrm{d}\vec{S}_x = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\hat{a}_x$

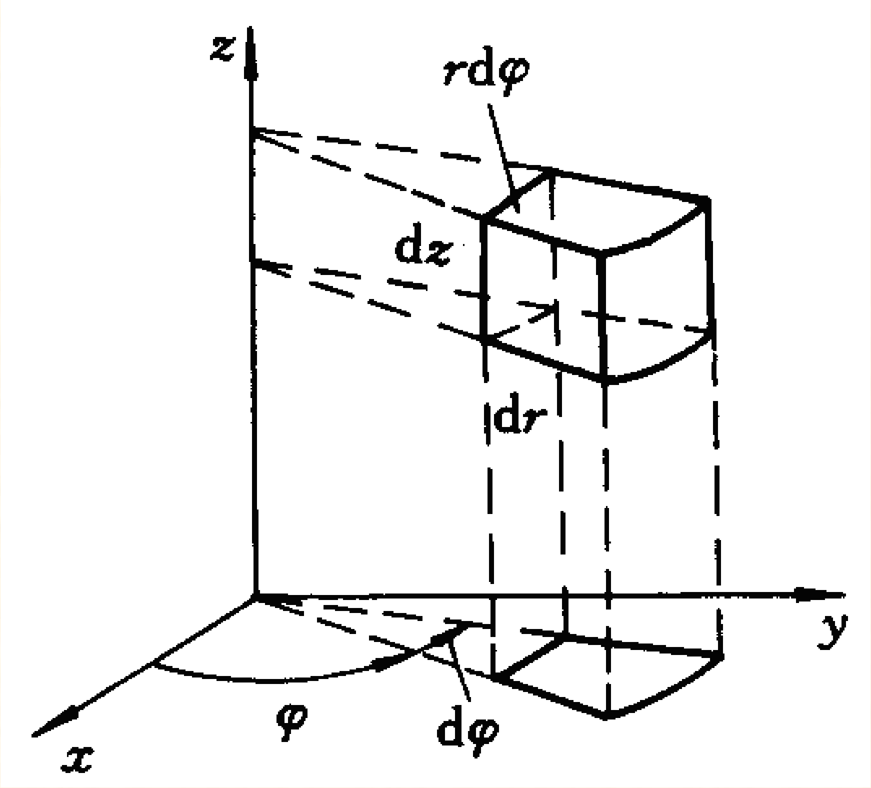
$\mathrm{d}\vec{S}_y = \mathrm{d}x\mathrm{d}z\hat{a}_y$

$\mathrm{d}\vec{S}_z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\hat{a}_z$

体元： $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

2. 圆柱坐标系

在圆柱坐标系中，坐标变量为(r,φ,z)，如图，做一微分体元。



线元：

$$d\vec{l} = dr\vec{a}_r + rd\varphi\vec{a}_\varphi + dz\vec{a}_z$$

面元：

$$d\vec{S}_r = rd\varphi dz\vec{a}_r$$

$$d\vec{S}_\varphi = drdz\vec{a}_\varphi$$

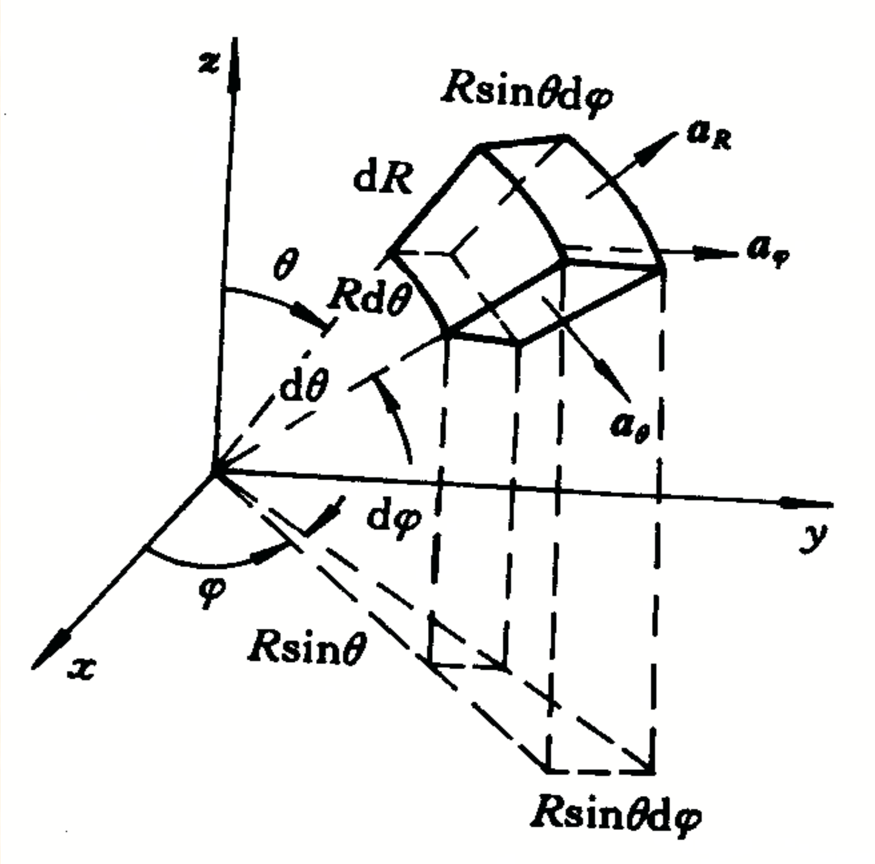
$$d\vec{S}_z = rd\varphi dr\vec{a}_z$$

体元：

$$dV = rdrd\varphi dz$$

3. 球坐标系

在球坐标系中，坐标变量为 (R,θ,φ)，如图，做一微分体元。



线元：

$$d\vec{l} = dR\vec{a}_R + Rd\theta\vec{a}_\theta + R\sin\theta d\varphi\vec{a}_\varphi$$

面元：

$$d\vec{S}_R = R^2\sin\theta d\theta d\varphi\vec{a}_R$$

$$d\vec{S}_\theta = R\sin\theta dRd\varphi\vec{a}_\theta$$

$$d\vec{S}_\varphi = RdRd\theta\vec{a}_\varphi$$

体元：

$$dV = R^2\sin\theta dRd\theta d\varphi$$

场的基本概念

- 1.什么是场?
- 重力场、温度场、电磁场、……
- a.从数学角度：场是给定区域内各点数值的集合，这些数值规定了该区域内一个特定量的特性。
- 比如：T 是温度场中的物理量，T 就是温度场
- b.从物理角度：场是遍及一个被界定的或无限扩展的空间内的，能够产生某种物理效应的特殊的物质，场是具有能量的。

2.场的分类

a. 按物理量的性质分：

标量场：描述场的物理量是标量。

矢量场：描述场的物理量是矢量。

b. 按场量与时间的关系分：

静态场：场量不随时间发生变化的场。

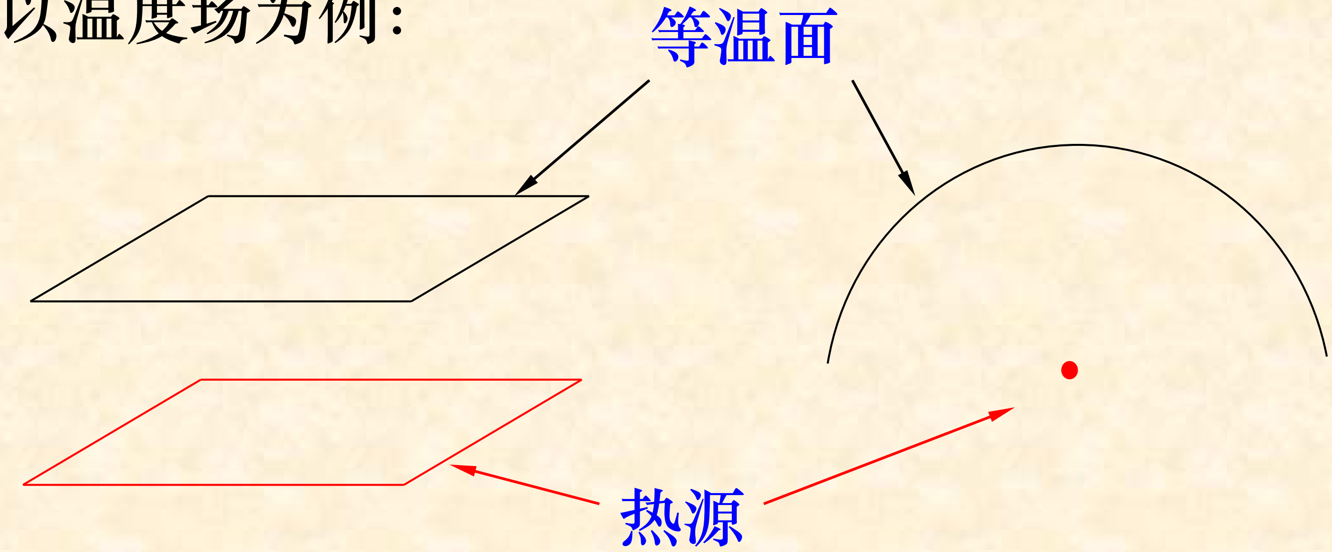
动态场：场量随时间的变化而变化的场。

动态场也称为时变场。

四、标量场的梯度

1. 标量场的等值面

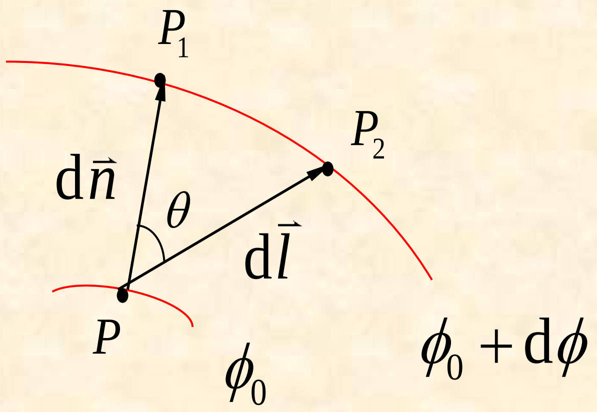
以温度场为例：



可以看出：标量场的函数是单值函数，各等值面是互不相交的。

2. 标量场的梯度

标量场的场函数为 $\phi(x,y,z,t)$



a.方向导数:

$\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}l}$ 空间变化率，称为方向导数。

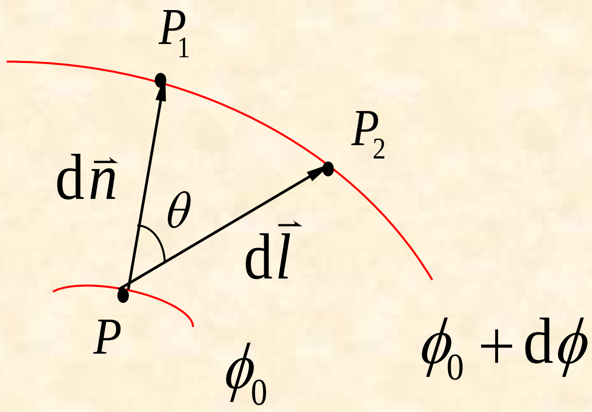
$\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}$ 为最大的方向导数。

b.梯度

定义：标量场中某点梯度的大小为该点最大的方向导数，其方向为该点所在等值面的法线方向。

数学表达式： $\mathrm{grad}\,\phi=\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}\hat{a}_n$

计算: $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}l} = \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n} \cdot \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}l} = \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}\cos\theta = \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}\hat{a}_n \cdot \hat{a}_l$



$$\mathrm{d}\phi = \mathrm{grad}\phi \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

在直角坐标系中:

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}x\hat{a}_x + \mathrm{d}y\hat{a}_y + \mathrm{d}z\hat{a}_z$$

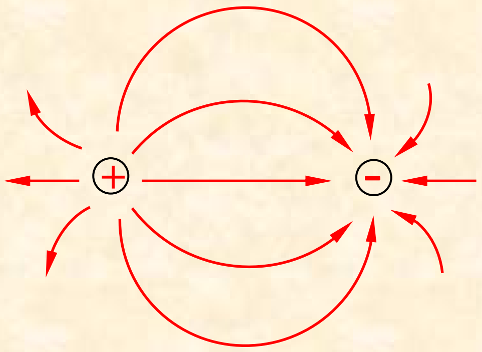
所以: $\boxed{\mathrm{grad}\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\hat{a}_x + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\hat{a}_y + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\hat{a}_z}$

梯度也可表示: $\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi$

五、矢量场的散度

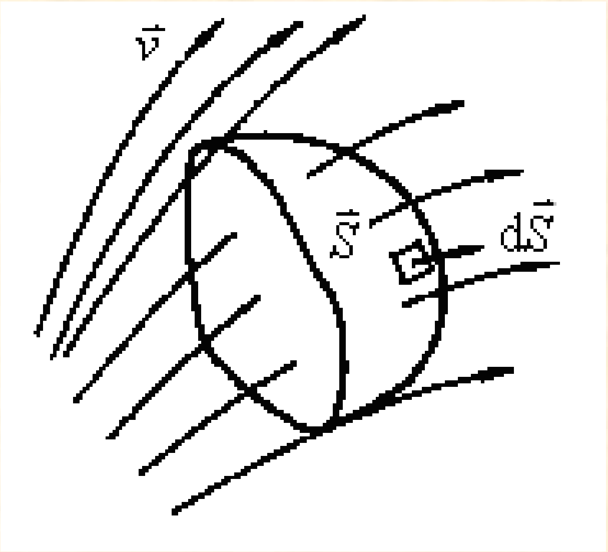
1. 矢线（场线）：

在矢量场中，若一条曲线上每一点的切线方向与场矢量在该点的方向重合，则该曲线称为矢线。



2. 通量：

定义：如果在该矢量场中取一曲面S，通过该曲面的矢线量称为通量。



表达式：$\psi = \int_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

若曲面为闭合曲面：$\psi = \oint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

讨论:

a. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi > 0$

说明穿出闭合面的通量大于穿入曲面的通量，意味着闭合面内存在正的通量源。

b. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi < 0$

说明穿入的通量大于穿出的通量，那么必然有一些矢线在曲面内终止了，意味着闭合面内存在负源或称沟。

c. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi = 0$

说明穿入的通量等于穿出的通量。

3. 散度:

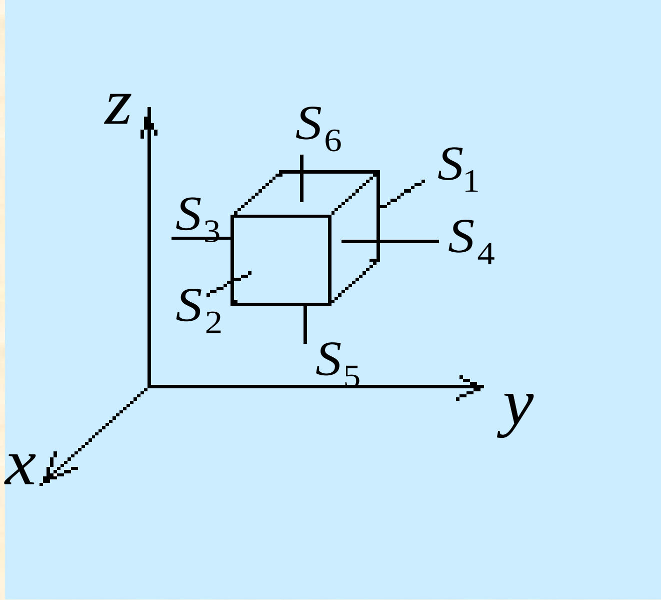
a.定义：矢量场中某点的通量密度称为该点的散度。

b.表达式:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

c.散度的计算:

在直角坐标系中，如图做一封闭曲面，该封闭曲面由六个平面组成。



矢量场 $\vec{F}$ 表示为:

$$\vec{F}=F_x\hat{a}_x+F_y\hat{a}_y+F_z\hat{a}_z$$

$$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S}_1+\int_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S}_2+\int_{S_3}\vec{F}\cdot d\vec{S}_3+\int_{S_4}\vec{F}\cdot d\vec{S}_4+\int_{S_5}\vec{F}\cdot d\vec{S}_5+\int_{S_6}\vec{F}\cdot d\vec{S}_6$$

在 x方向上：计算穿过 S_1和 S_2面的通量为

$$\int_{S_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 = F_x(x_1)\hat{a}_x \cdot \Delta y\Delta z(-\hat{a}_x) = -F_x(x_1)\Delta y\Delta z$$

$$\int_{S_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 = F_x(x_2)\hat{a}_x \cdot \Delta y\Delta z\hat{a}_x = F_x(x_1+\Delta x)\Delta y\Delta z$$

因为： $$F_x(x_1+\Delta x) \approx F_x(x_1) + \frac{\partial F_x(x)}{\partial x}\Delta x$$

则： $$\int_{S_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 = F_x(x_1)\Delta y\Delta z + \frac{\partial F_x(x)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

在 x 方向上的总通量： $$\int_{S_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 = \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

同理：在 y方向上,穿过 S_3和 S_4面的总通量：

$$\int_{S_3} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_3 + \int_{S_4} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_4 = \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

在 z 方向上,穿过 S_5和 S_6面的总通量：

$$\int_{S_5} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_5 + \int_{S_6} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_6 = \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

整个封闭曲面的总通量：

$$\oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

该闭合曲面所包围的体积： $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

通常散度表示为： $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$

4.散度定理：

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F}\, \mathrm{d}V$$

物理含义：穿过一封闭曲面的总通量等于矢量散度的体积分。

常用坐标系中，散度的计算公式

直角坐标系中：

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

柱坐标系中：

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial (F_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

球坐标系中：

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial (R^2 F_R)}{\partial R} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial (F_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

正交曲线坐标系中：

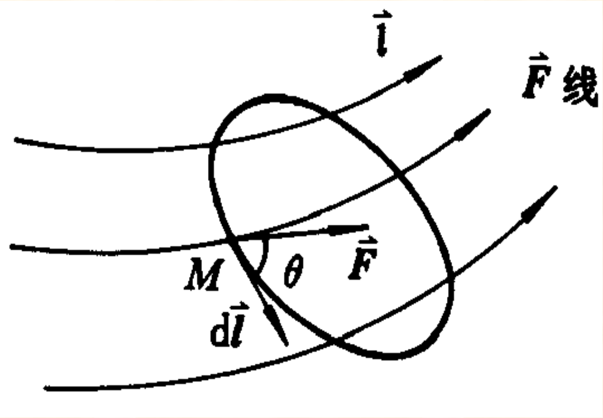
$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial \left(F_{u_1} h_2 h_3\right)}{\partial u_1} + \frac{\partial (F_{u_2} h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{\partial (F_{u_3} h_1 h_2)}{\partial u_3}\right]$$

六、矢量场的旋度

1. 环量:

在矢量场中，任意取一闭合曲线，将矢量沿该曲线积分称之为环量。

$$C = \oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



可见：环量的大小与环面的方向有关。

2. 旋度:

定义：一矢量其大小等于某点最大环量密度，方向为该环的法线方向，那么该矢量称为该点矢量场的旋度。

表达式：
$$\mathrm{rot}\vec{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \left[\hat{a}_n \oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\right]_{\max}$$

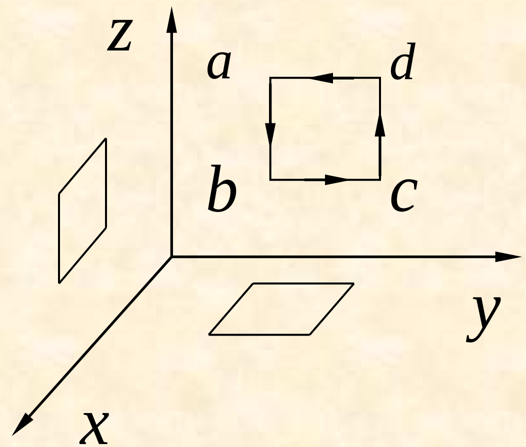
旋度计算：

旋度可用符号表示： $\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$

以直角坐标系为例，一旋度矢量可表示为：

$$\nabla \times \vec{F} = (\nabla \times \vec{F})_x \hat{a}_x + (\nabla \times \vec{F})_y \hat{a}_y + (\nabla \times \vec{F})_z \hat{a}_z$$

其中：$(\nabla \times \vec{F})_x$ 为 x 方向的环量密度。



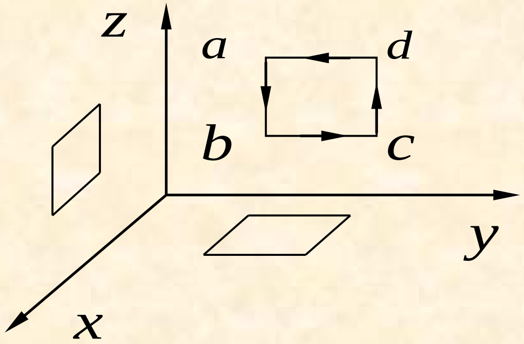
$$\boxed{(\nabla \times \vec{F})_x = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{l_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\Delta S_x}}$$

场矢量： $\vec{F} = F_x \hat{a}_x + F_y \hat{a}_y + F_z \hat{a}_z$

$$\oint_{l_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{l_{ab}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}_{ab} + \int_{l_{bc}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}_{bc} + \int_{l_{cd}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}_{cd} + \int_{l_{da}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}_{da}$$

其中: $\mathrm{d}\vec{l}_{ab}=\mathrm{d}z(-\hat{a}_z)$ $\mathrm{d}\vec{l}_{bc}=\mathrm{d}y\hat{a}_y$

$\mathrm{d}\vec{l}_{cd}=\mathrm{d}z\hat{a}_z$ $\mathrm{d}\vec{l}_{da}=\mathrm{d}y(-\hat{a}_y)$



所以: $\oint_{l_1}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-F_z\Delta z+F_y\Delta y$

$$+(F_z+\frac{\partial F_z}{\partial y}\Delta y)\Delta z-(F_y+\frac{\partial F_y}{\partial z}\Delta z)\Delta y=(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z})\Delta S_x$$

$$\boxed{(\nabla\times\vec{F})_x=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{l_1}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}{\Delta S_x}}$$

$\xrightarrow{\text{可得:}}$ $(\nabla\times\vec{F})_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}$

同理: $(\nabla\times\vec{F})_y=\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}$ $(\nabla\times\vec{F})_z=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}$

旋度公式:
$$\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z$$

为了便于记忆，将旋度的计算公式写成下列形式：

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

类似地，可以推导出在广义正交坐标系中旋度的计算公式：

$$\boxed{\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{a}_{u_1} & h_2 \hat{a}_{u_2} & h_3 \hat{a}_{u_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_{u_1} & h_2 F_{u_2} & h_3 F_{u_3} \end{vmatrix}}$$

对于柱坐标、球坐标，已知其拉梅系数，代入公式即可写出旋度的计算公式。

3. 斯托克斯定理：

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

物理含义：

一个矢量场旋度的面积分等于该矢量沿此曲面周界的曲线积分。

七、重要的场论公式

1. 两个零恒等式

(1) $\nabla\times(\nabla\phi)\equiv 0$

任何标量场梯度的旋度恒为零。

(2) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})\equiv 0$

任何矢量场的旋度的散度恒为零。

2. 拉普拉斯算子 $\nabla^2\phi = \nabla\cdot(\nabla\phi)$

在直角坐标系中：$\nabla^2\phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

在圆柱坐标系中：$\nabla^2\phi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial\phi}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

在球坐标系中：

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial\phi}{\partial R}) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

在广义正交曲线坐标系中：

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3})\right]$$

3. 常用的矢量恒等式

$$\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi$$

$$\nabla\cdot(\phi\vec{A})=\vec{A}\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot\vec{A}$$

$$\nabla\times(\phi\vec{A})=\nabla\phi\times\vec{A}+\phi\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\nabla\cdot\vec{B}-\vec{B}\nabla\cdot\vec{A}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

8、 亥姆霍兹定理

亥姆霍兹定理：若矢量场 $\vec{F}$ 在无限空间中处处单值，且其导数连续有界，而源分布在有限空间区域中，则矢量场由其散度和旋度唯一确定，并且可以表示为一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和，即

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla\varphi + \nabla\times\vec{A}}$$

证明：假设在无限空间中有两个矢量函数 $\vec{G}$ 和 $\vec{F}$ ，它们具有相同的散度和旋度。但这两个矢量函数不等，令

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{g}$$

要证明矢量场由其散度和旋度唯一确定，即矢量$\vec{G}$和矢量$\vec{F}$是同一矢量，$\vec{g}$应该为零矢量。

$$\because \quad \nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot(\vec{G}+\vec{g})=\nabla\cdot\vec{G}+\nabla\cdot\vec{g}$$

因为 $\vec{F}$ 和 $\vec{G}$ 有相同的散度和旋度

$$\because \quad \nabla\cdot\vec{G}=\nabla\cdot\vec{F}$$

$$\boxed{\therefore \quad \nabla\cdot\vec{g}=0}$$

$$\because \quad \nabla\times\vec{F}=\nabla\times(\vec{G}+\vec{g})=\nabla\times\vec{G}+\nabla\times\vec{g}$$

$$\because \quad \nabla\times\vec{G}=\nabla\times\vec{F}$$

$$\boxed{\therefore \quad \nabla\times\vec{g}=0}$$

$$\because \quad \nabla\times\vec{g}=0$$

由矢量场论中梯度的散度恒等于零，令 $\vec{g}=\nabla\varphi$

$$\because \quad \nabla\cdot\vec{g}=0 \qquad \therefore \quad \nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi=0$$

由在无限空间中拉普拉斯方程解的有限性及 φ 函数的任意性，知 φ 只能是一个常数，即 $\vec{g}=0$ ，$\vec{G}=\vec{F}$ 。

无源（散）场与无旋场

•无源（散）场

若一矢量场 $\vec{F}_c$ 中，其散度处处为零，即

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{F}_c = 0}$$

则该场称为无散场，有

$$\boxed{\oint_S \vec{F}_c \cdot d\vec{S} = 0}$$

由矢量场论知：旋度的散度等于零，所以

$$\boxed{\vec{F}_c = \nabla \times \vec{A}}$$

（ $\vec{A}$ 称为矢势）

•无旋场

若一矢量场 $\vec{F}_d$ 中，其旋度处处为零，即

$$\nabla \times \vec{F}_d = 0$$

则该场称为无旋场，有

$$\oint_c \vec{F}_d \cdot d\vec{l} = 0$$

由矢量场论知：梯度的旋度等于零，所以

$$\vec{F}_d = \nabla \varphi$$

φ 称为标（位）势

- 一般而言，在无限空间中一个既有散度又有旋度的矢量场，可表示为一个无旋场 $\vec{F}_d$ 和一个无散场 $\vec{F}_c$ 之和，即

$$\vec{F} = \vec{F}_d + \vec{F}_c = -\nabla\varphi + \nabla\times\vec{A}$$