# 第2章 电磁学基本理论

# 一、场量的定义和计算

## (一) 电场

### 1. 什么是电场?

这种存在于电荷周围，能对其他电荷产生作用力的特殊的物质称为电场。可见电荷是产生电场的源。

### 2. 电场强度的定义

单位正电荷在电场中某点受到的作用力称为该点的电场强度。

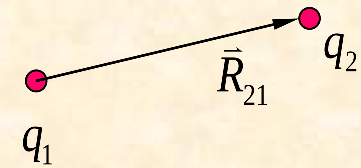
电场强度严格的数学表达式为：

$$\boxed{\vec{E} = \lim_{q_t \to 0} \frac{\vec{F}}{q_t}}$$

在此要求实验电荷足够小，以使该电荷产生的电场不致使原电场发生畸变。

## 3. 库仑定律

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 {R_{21}}^2}\hat{a}_{R_{21}}$$




其中：$\varepsilon_0$为真空中介电常数。

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times10^{-9} = 8.85\times10^{-12} \quad \mathrm{F/m}$$

## 4. 电场强度的计算

$$\vec{E} = \frac{qq_t}{4\pi\varepsilon_0 q_t R^2}\hat{a}_R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

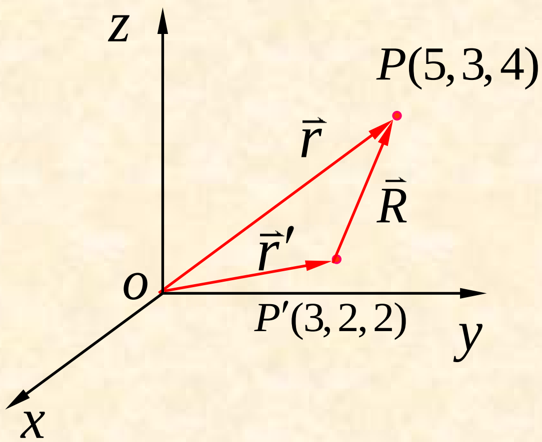
其中：$\hat{a}_R$ 是源电荷指向场点的方向。

**(1) 点电荷周围电场强度的计算公式:**

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R}$$

例1：在直角坐标系中，设一点电荷$q$位于点$P'(3,2,2)$，计算空间点$P(5,3,4)$的电场强度。

解：如图




$P'(3,2,2)$ 点的坐标矢量为：

$$\vec{r}' = 3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$$

$P(5,3,4)$ 点的坐标矢量为：

$$\vec{r} = 5\hat{a}_x + 3\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$$

点电荷电场强度的计算公式

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

其中：$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = 2\hat{a}_x + 1\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

$$\hat{a}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{2\hat{a}_x + 1\hat{a}_y + 2\hat{a}_z}{3}$$

所以：$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{2\hat{a}_x + 1\hat{a}_y + 2\hat{a}_z}{27}$

**结论：**

在直角坐标系中，若源电荷 $q$ 所在点的坐标为 $(x',y',z')$，场点 $P$ 的坐标为 $(x,y,z)$，则 $P$ 点的电场强度为：

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(x-x')\hat{a}_x+(y-y')\hat{a}_y+(z-z')\hat{a}_z}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}^{\,3}}\right]$$

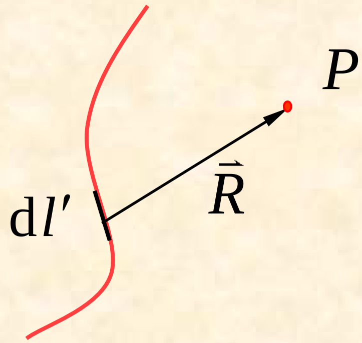
✧多个电荷产生的电场

如果有多个点电荷源,场域中某点的电场强度应该是所有点电荷在该场中产生的电场强度的矢量和。

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x-x_i')\hat{a}_x+(y-y_i')\hat{a}_y+(z-z_i')\hat{a}_z}{\left[(x-x_i')^2+(y-y_i')^2+(z-z_i')^2\right]^{3/2}}$$

## (2) 连续分布的电荷源产生的电场

a.线电荷分布：电荷沿某一曲线连续分布 。




线电荷密度定义：单位长度上的电荷量。

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l'}$$

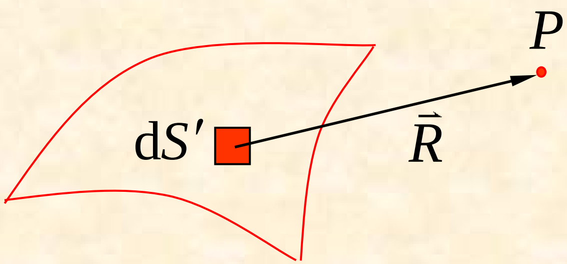
$\mathrm{d}l'$上所带的电荷量：$\mathrm{d}q = \rho_l \mathrm{d}l'$

$\mathrm{d}q$产生的电场强度为：$\mathrm{d}\vec{E} = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R = \dfrac{\rho_l \mathrm{d}l'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$

该线电荷在空间产生的电场强度：

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'} \frac{\rho_l \mathrm{d}l'}{R^2}\hat{a}_R}$$

## b.面电荷分布：电荷沿空间曲面连续分布。




面电荷密度定义：单位面积上的电荷量。

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S'}$$

$\mathrm{d}S'$上所带的电荷量：$\mathrm{d}q = \rho_S \mathrm{d}S'$

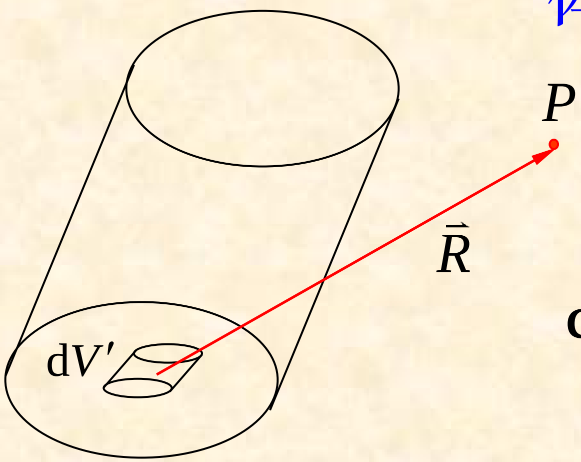
$\mathrm{d}q$产生的电场强度为：$\mathrm{d}\vec{E} = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R = \dfrac{\rho_S \mathrm{d}S'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$

该面电荷在空间产生的电场强度：

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'} \frac{\rho_S \mathrm{d}S'}{R^2}\hat{a}_R}$$

## c.体电荷分布：电荷在某空间体积内连续分布。

体电荷密度定义：单位体积内的电荷量。




$$\rho_V = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$

$\mathrm{d}V'$上所带的电荷量： $\mathrm{d}q = \rho_V \mathrm{d}V'$

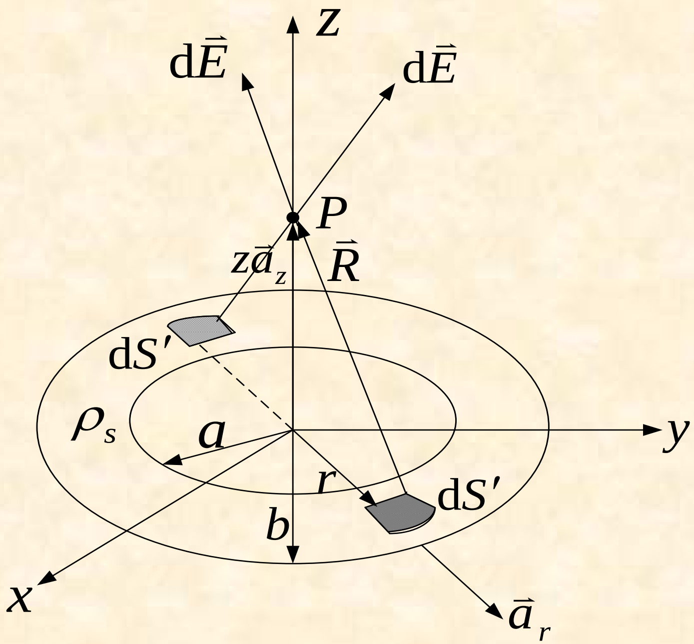
$\mathrm{d}q$产生的电场强度为： $\mathrm{d}\vec{E} = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R = \dfrac{\rho_V \mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$

该体电荷在空间产生的电场强度:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho_V \mathrm{d}V'}{R^2}\hat{a}_R}$$

例2：设有一无限大的均匀带电平面，面电荷密度为$\rho_S$。

求：距平面$h$高处的电场强度$\vec{E}$。




解：根据题意，选取圆柱坐标系

面元：$\mathrm{d}S' = r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi'$

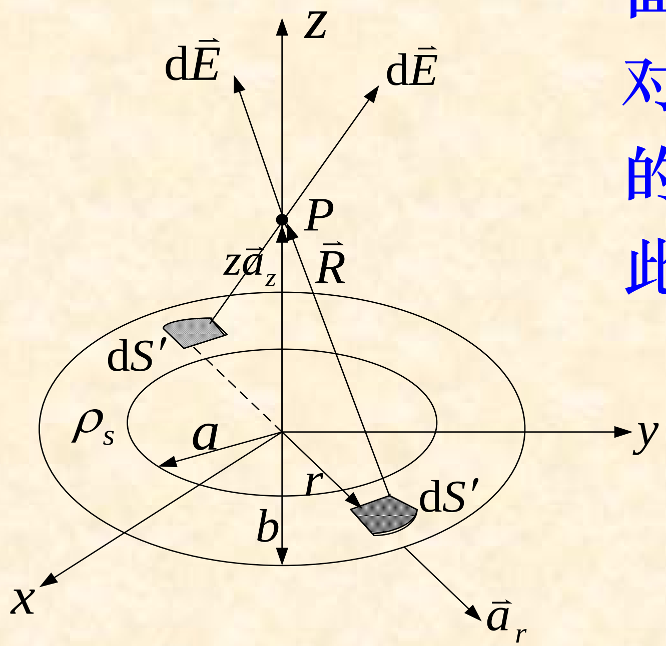
面元上的电荷量为：$\mathrm{d}q = \rho_S r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi'$

从此电荷源到 $z$ 轴上 $P$ 点的距离矢量为：$\vec{R} = -r'\hat{a}_r + h\hat{a}_z$

距离大小为：$R = (r'^2 + h^2)^{1/2}$

根据面分布电荷在空间一点所产生的电场强度公式：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\rho_S \mathrm{d}S'}{R^2}\hat{a}_R = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi'}{[r'^2+h^2]^{3/2}}[-r'\hat{a}_r + h\hat{a}_z]$$




由于电荷分布的对称性，对每一个面元 $\mathrm{d}S'$，将有一个对称面元 $\mathrm{d}S'$ 与之对应，这两个面元上的电荷在$P$点产生的电场强度的径向分量相互抵消，因此$P$点的电场强度的径向分量为零。

$$\vec{E}=\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{r'h}{[r'^2+h^2]^{3/2}}\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}r'\hat{a}_z$$

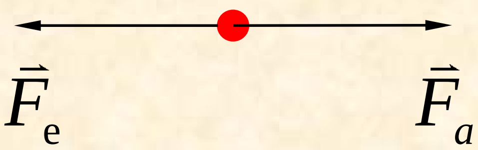
$$=\frac{\rho_S h}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi\left[-\frac{1}{[r'^2+h^2]^{1/2}}\right]_0^{\infty}\hat{a}_z$$

$$=\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z$$

■ 可见：无限大均匀带电平面产生的电场是均匀的,与距离 $h$无关，方向为该平面的法线方向。

## （二）电位

### 1. 电位差




电荷 $q_{\mathrm{t}}$ 在电场中受力为：　$\vec{F}_{\mathrm{e}} = q_{\mathrm{t}}\vec{E}$

电荷 $q_{\mathrm{t}}$ 在电场中要保持静止，需受外力作用为：

$$\vec{F}_a = -q_{\mathrm{t}}\vec{E}$$

电荷在静电场中由$P$点移动到$A$点，外力所做的功为：

$$W = -q_{\mathrm{t}}\int_P^A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

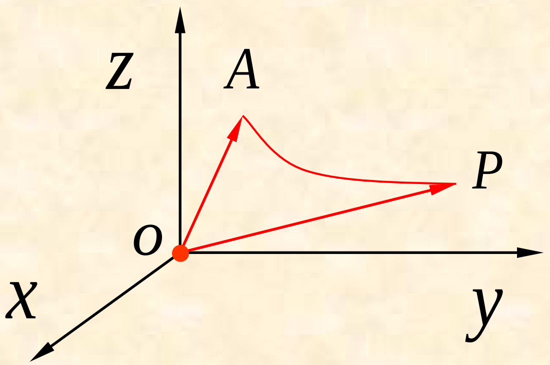
电位差定义：

单位正电荷由$P$点移动到$A$点，外力所做的功称为$A$点和$P$点之间的电位差。

$$\phi_{AP} = \frac{W}{q_{\mathrm{t}}} = -\int_P^A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

例3：计算原点处一点电荷$q$产生的电场中$AP$之间的电位差。

解：选取求坐标系，点电荷$q$产生的电场




$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\hat{a}_R$$

$$\phi_{AP}=-\int_P^A \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\mathrm{d}\vec{l}=\mathrm{d}R\hat{a}_R+R\mathrm{d}\theta\hat{a}_\theta+R\sin\theta\mathrm{d}\varphi\hat{a}_\varphi$$

所以：

$$\phi_{AP}=\int_A^P\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2}\hat{a}_R\cdot\mathrm{d}R\hat{a}_R$$

$$=\int_{R_A}^{R_P}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2}\mathrm{d}R$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_P}\right)$$

结论：

空间两点的电位差只与两点所在位置有关，而与积分路径无关。

## 2. 电位

### （1）电位定义：

外力将单位正电荷是由无穷远处移到$A$点，则$A$点和无穷远处的电位差称为$A$点的电位。

$$\phi_A = \int_A^{\infty} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_A}$$

以无穷远处为零电位参考点。$R_A$ 为电荷源到$A$点的距离。

### （2）电位计算：

a.点电荷的电位计算： $\phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

多个点电荷的电位计算： $\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\dfrac{q_i}{R_i}$

其中： $R_i$ 为第$i$个电荷源到$A$点的距离。

## b.连续分布的电荷源的电位计算

线电荷分布：$\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{l'}\dfrac{\rho_l}{R}\mathrm{d}l'$

面电荷分布：$\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{S'}\dfrac{\rho_S}{R}\mathrm{d}S'$

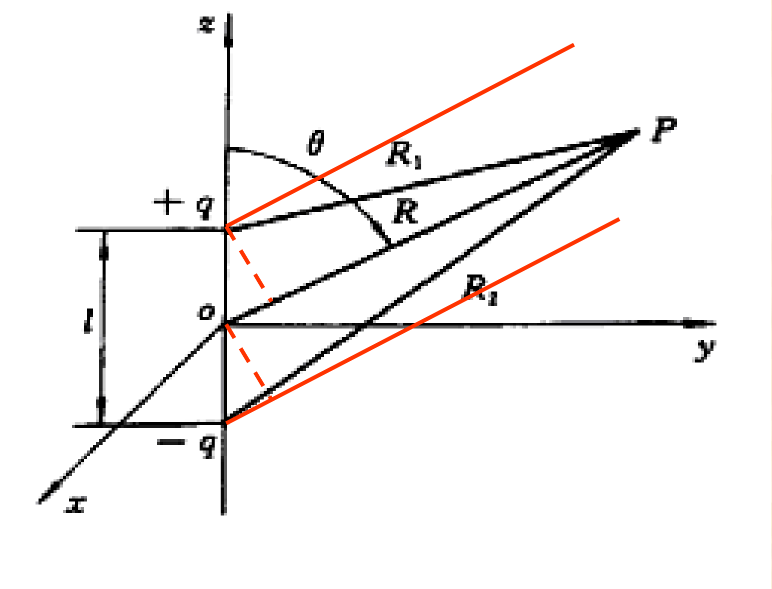
体电荷分布：$\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{V'}\dfrac{\rho_V}{R}\mathrm{d}V'$

## 3. 电场强度 $\vec{E}$ 与电位 $\phi$ 之间的关系

$$\phi=-\int_l \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}\phi=-\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\mathrm{d}\phi=\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\vec{l}\quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{E}=-\nabla\phi}$$

例4：　有一对等量异号相距很近的电荷构成电偶极子，如图，求：P点的电位和电场强度 。




解：取球坐标系， P点的电位

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right)$$

因为：　$l << R$

$$R_1 \approx R-\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$R_2 \approx R+\frac{l}{2}\cos\theta$$

则：

$$R_2-R_1 \approx l\cos\theta$$

$$R_2R_1 \approx R^2-\frac{l^2}{4}\cos^2\theta \approx R^2$$

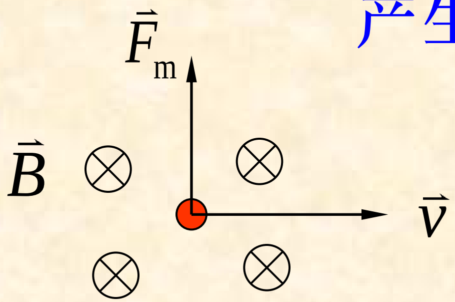
$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{l\cos\theta}{R^2}$$

电场强度：

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial R}\hat{a}_R+\frac{\partial\phi}{R\partial\theta}\hat{a}_\theta+\frac{\partial\phi}{R\sin\theta\partial\varphi}\hat{a}_\varphi\right)$$

$$\vec{E} = \frac{ql\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0R^3}\hat{a}_R+\frac{ql\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0R^3}\hat{a}_\theta$$

## (三) 磁场




产生磁场的源：　a.永久磁铁　b.变化的电场

c.电流周围，即运动的电荷

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

### 1. 什么是磁场?

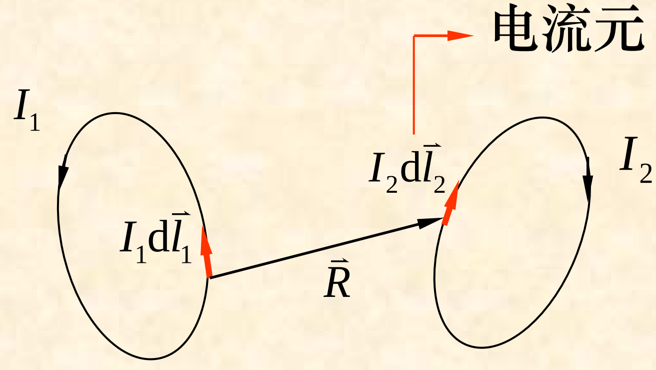
存在于载流回路或永久磁铁周围空间，能对运动电荷施力的特殊物质称为磁场。

### 2. 磁感应强度 $\vec{B}$ 的定义

$$\vec{B} = \lim_{q_{\mathrm{t}} \to 0} \frac{\vec{F}_{\mathrm{m}} \times \hat{a}_v}{q_{\mathrm{t}} v}$$

可见：　磁场力 $\vec{F}_{\mathrm{m}}$、运动速度 $\hat{a}_v$ 和磁感应强度 $\vec{B}$ 三者相互垂直，且满足右手螺旋法则。

## 3. 磁感应强度的计算




安培力实验定律：

$$\mathrm{d}\vec{F}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times(I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\hat{a}_R)}{R^2}$$

其中：$\mu_0$为真空磁导率。 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ H/m

$$I_2\mathrm{d}\vec{l}_2=\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2=\mathrm{d}q_2\frac{\mathrm{d}\vec{l}_2}{\mathrm{d}t}=\mathrm{d}q_2\vec{v}_2$$

得到： $\mathrm{d}\vec{F}_{21}=\mathrm{d}q_2\vec{v}_2\times[\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\hat{a}_R}{R^2}]$ $\xleftrightarrow{\text{比较}}$ $\vec{F}_m=q\vec{v}\times\vec{B}$

电流元 $I_1\mathrm{d}\vec{l}_1$在空间所产生的磁感应强度为：

$$\mathrm{d}\vec{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\hat{a}_R}{R^2}$$

该式称为毕奥—萨伐尔定律。

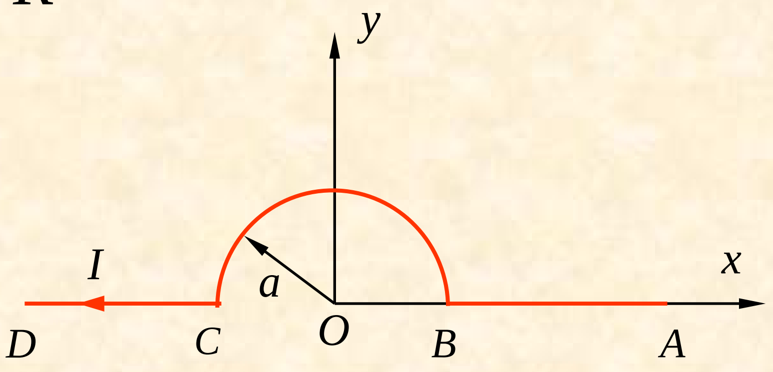
a.闭合电流回路在空间所产生的磁感应强度：

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'\times\hat{a}_R}{R^2}\qquad \text{特斯拉(T)}$$

例5：求如图所示的电流线 $I$ 在$O$点产生的磁感应强度。

解：取圆柱坐标系 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'\times\hat{a}_R}{R^2}$

将电流线分成 $AB$, $BC$, $CD$ 三段分别求这三段电流在$O$点产生的磁感应强度。



（1）$AB$段在$O$点产生的 $\vec{B}_1$

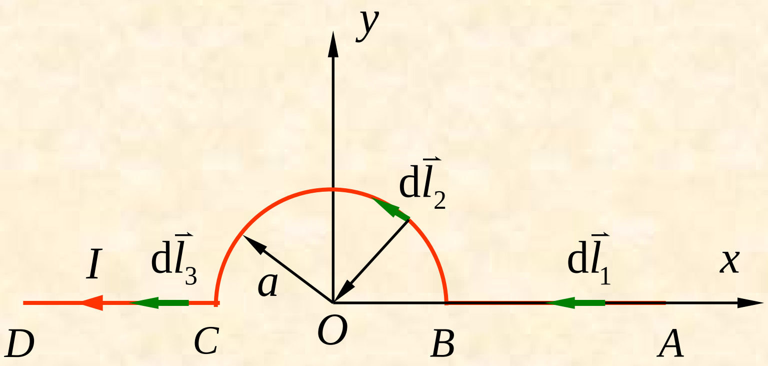
$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{l}_1' = \mathrm{d}r(-\hat{a}_r) \\ \hat{a}_{R1} = (-\hat{a}_r) \end{cases}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_1'} \frac{I\mathrm{d}\vec{l}_1' \times \hat{a}_{R1}}{R_1^2} = 0$$

（2）$BC$段在$O$点产生的 $\vec{B}_2$

$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{l}_2' = a\mathrm{d}\varphi\hat{a}_\varphi \\ \hat{a}_{R2} = (-\hat{a}_r) \\ R_2 = a \end{cases}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\pi \frac{Ia\mathrm{d}\varphi\hat{a}_\varphi \times (-\hat{a}_r)}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4a}\hat{a}_z$$




（3）$CD$段在$O$点产生的 $\vec{B}_3$

$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{l}_3' = \mathrm{d}r\hat{a}_r \\ \hat{a}_{R3} = (-\hat{a}_r) \end{cases}$$

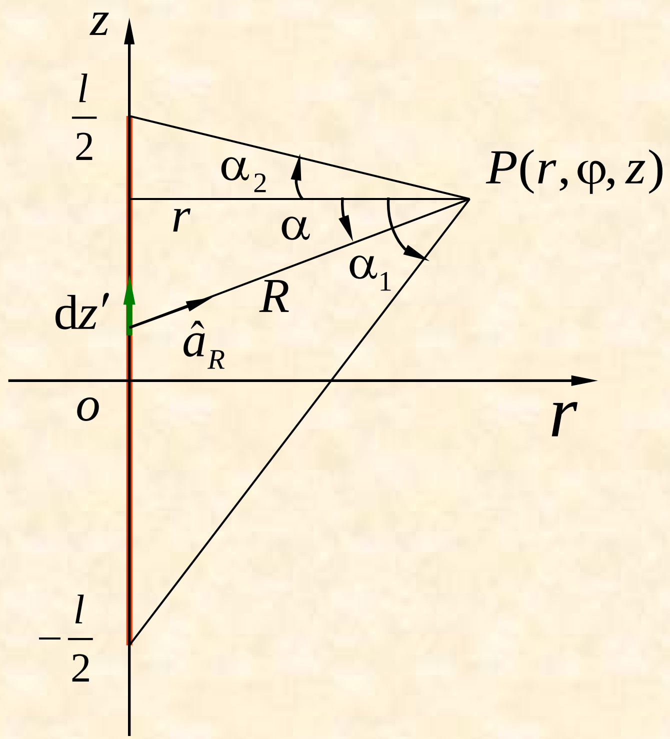
$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_3'} \frac{I\mathrm{d}\vec{l}_3' \times \hat{a}_{R3}}{R_3^2} = 0$$

$O$点产生的磁感应强度:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4a}\hat{a}_z$$

例6：求长为*l*，载有电流 *I* 的细直导线在*P*点产生的磁感应强度。

解：如图所示，选用圆柱坐标系




$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'\times\vec{a}_R}{R^2}$$

式中：$\mathrm{d}\vec{l}'=\mathrm{d}z'\hat{a}_z$

$$z'=z-r\tan\alpha$$

$$\mathrm{d}z'=-r\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

$$R=r\sec\alpha$$

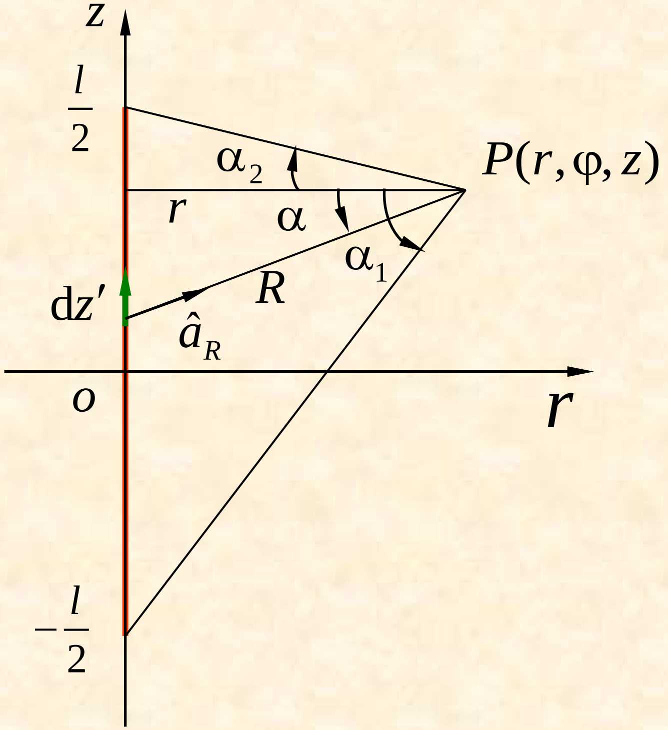
$$\hat{a}_R=\hat{a}_r\cos\alpha+\hat{a}_z\sin\alpha$$

所以：$\mathrm{d}\vec{l}'\times\hat{a}_R=\hat{a}_z\mathrm{d}z'\times(\hat{a}_r\cos\alpha+\hat{a}_z\sin\alpha)=-\hat{a}_\varphi r\sec^2\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{-\hat{a}_\varphi r\sec^2\alpha\cos\alpha}{r^2\sec^2\alpha}\mathrm{d}\alpha=\hat{a}_\varphi\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)$$

## 有限长度电流线磁感应强度：

$$\vec{B} = \hat{a}_{\varphi} \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$



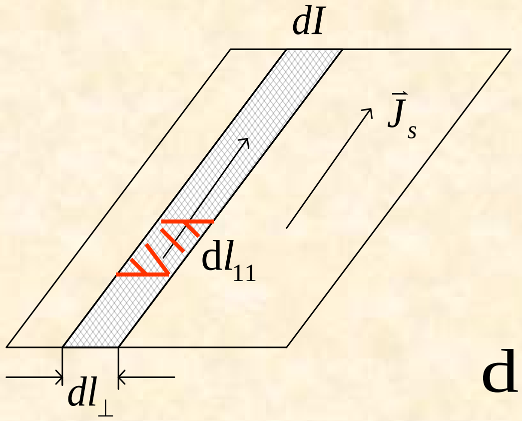

式中：
$$\sin\alpha_1 = \frac{z+\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+(z+\frac{l}{2})^2}}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{z-\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+(z-\frac{l}{2})^2}}$$

## 无限长载流直导线周围磁感应强度：

即： $l \to \infty$ $\begin{cases} \alpha_1 \to \pi/2 \\ \alpha_2 \to -\pi/2 \end{cases}$ 于是得： $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_{\varphi}$

## b. 面电流情况：电流在某一曲面上流动。




面电流密度：

定义为在与电流线垂直的方向上单位长度流过的电流。

$$\vec{J}_S = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l_\perp}\hat{a}_I \qquad (\mathrm{A/m})$$

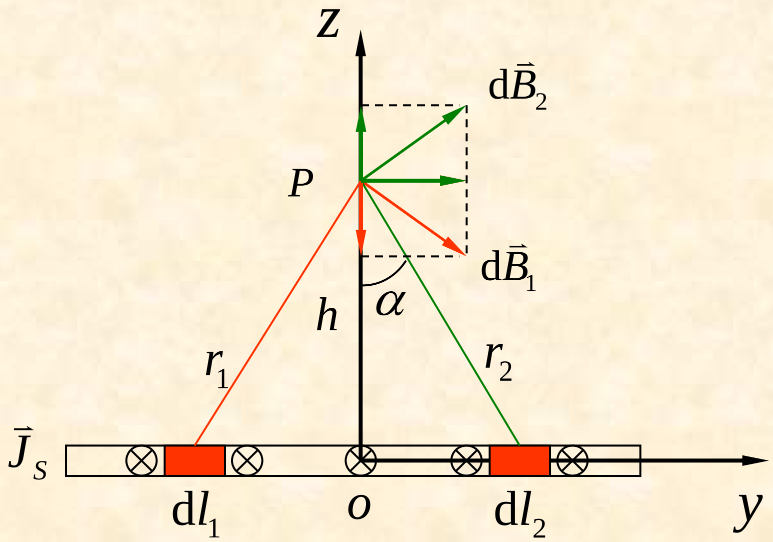
$\mathrm{d}l_\perp$上流过的电流量：$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{J}_S \mathrm{d}l_\perp$

$\mathrm{d}\vec{I}$ 产生的磁感应强度为：

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_{11}} \frac{\vec{J}_S \mathrm{d}l_\perp \mathrm{d}l_{11} \times \hat{a}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_{11}} \frac{\vec{J}_S \times \hat{a}_R}{R^2}\mathrm{d}l_\perp \mathrm{d}l_{11}$$

整个面电流产生的磁场：$\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{S'} \frac{\vec{J}_S \times \hat{a}_R}{R^2}\mathrm{d}S'$

例7：设一面电流密度为 $\vec{J}_S$ 的无限大均匀导流面，求：距该平面$h$高处的磁感应强度?




解：如图，选用直角坐标系

$\mathrm{d}l_1$上流过的电流为 $\vec{J}_S \mathrm{d}l_1$

$$\mathrm{d}\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 J_S \mathrm{d}l_1}{2\pi r_1}\hat{a}_{\varphi_1}$$

与 $\mathrm{d}l_1$对称的取线元 $\mathrm{d}l_2$

$$\mathrm{d}\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 J_S \mathrm{d}l_2}{2\pi r_2}\hat{a}_{\varphi_2}$$

$$\hat{a}_{\varphi_1} = \cos\alpha\hat{a}_y - \sin\alpha\hat{a}_z$$

$$\hat{a}_{\varphi_2} = \cos\alpha\hat{a}_y + \sin\alpha\hat{a}_z$$

其中：$\mathrm{d}l_1 = \mathrm{d}l_2 = \mathrm{d}y$

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+y^2}}$$

$$r_1 = r_2 = \sqrt{h^2+y^2}$$

$$\mathrm{d}\vec{B}_1 + \mathrm{d}\vec{B}_2 = 2\frac{\mu_0 J_S h\mathrm{d}y}{2\pi(h^2+y^2)}\hat{a}_y$$

该面电流在$P$点产生的磁感应强度：

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 J_S h}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{h^2+y^2}\hat{a}_y$$

$$=\frac{\mu_0 J_S h}{\pi}\left[\frac{1}{h}\arctan\left(\frac{y}{h}\right)\right]_0^{\infty}\hat{a}_y$$

$$=\frac{\mu_0 J_S}{2}\hat{a}_y$$

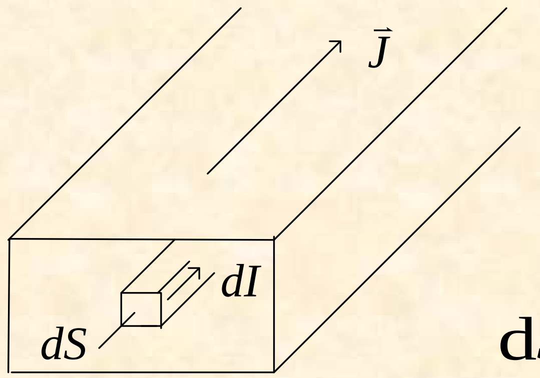
无限大均匀导流面两侧的磁感应强度：

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0 \vec{J}_S\times\hat{a}_n}{2}}$$

## c. 体电流情况：电流在某一体积内流动。

体电流密度：

定义为在与电流线垂直的方向上平面内单位面积流过的电流。




$$\vec{J}=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}\hat{a}_I \qquad (\mathrm{A/m^2})$$

$\mathrm{d}S$ 上流过的电流量： $\mathrm{d}\vec{I}=\vec{J}\mathrm{d}S$

$\mathrm{d}\vec{I}$ 产生的磁感应强度为：

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_{11}}\frac{\vec{J}\mathrm{d}S\mathrm{d}l_{11}\times\hat{a}_R}{R^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_{11}}\frac{\vec{J}\times\hat{a}_R}{R^2}\mathrm{d}S\mathrm{d}l_{11}$$

整个体电流产生的磁场： $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}\times\vec{a}_R}{R^2}\mathrm{d}V'$

# (四) 矢量磁位

## 1. 磁通量

磁感应强度对一个曲面的面积分称为穿过该曲面的磁通量。

$$\psi=\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

若曲面闭合：$\psi=\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

则有：

$$\boxed{\psi=\oint_S\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'\times\hat{a}_R}{R^2}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

磁感应强度：$\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}'\times\vec{a}_R}{R^2}$

根据梯度规则：$\nabla(\dfrac{1}{R})=-\dfrac{\hat{a}_R}{R^2}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}'\times\hat{a}_R}{R^2}=\nabla(\dfrac{1}{R})\times I\mathrm{d}\vec{l}'$

根据高斯定律：$\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V\nabla\cdot\vec{B}\mathrm{d}V$

$$\psi=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\oint_{l'}\nabla(\frac{1}{R})\times I\mathrm{d}\vec{l}'\mathrm{d}V=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\oint_{l'}\nabla\cdot[\nabla(\frac{1}{R})\times I\mathrm{d}\vec{l}']\mathrm{d}V$$

利用矢量恒等式：$\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{G}\cdot\nabla\times\vec{F}-\vec{F}\cdot\nabla\times\vec{G}$

$$\nabla\cdot[\nabla(\frac{1}{R})\times I\mathrm{d}\vec{l}']=I\mathrm{d}\vec{l}'\cdot\nabla\times\nabla(\frac{1}{R})-\nabla(\frac{1}{R})\cdot\nabla\times I\mathrm{d}\vec{l}'$$

已知：$\nabla\times\nabla(\frac{1}{R})\equiv 0$ 和 $\nabla\times I\mathrm{d}\vec{l}'=0$

$$\psi=\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\oint_{l'}\nabla\cdot[\nabla(\frac{1}{R})\times I\mathrm{d}\vec{l}']\mathrm{d}V=0$$

结论：

穿过空间任意闭合曲面的磁通量恒为零。这就是磁通连续性原理。它说明磁感线是连续的闭合矢线，磁场是无散场。

$$\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V\nabla\cdot\vec{B}\mathrm{d}V=0 \longrightarrow \nabla\cdot\vec{B}=0$$

## 2. 矢量磁位的引入

根据矢量恒等式： $\nabla\cdot\nabla\times\vec{F}\equiv 0$

引入矢量 $\vec{A}$，令 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 则： $\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=\nabla\cdot\vec{B}=0$

该矢量 $\vec{A}$ 称为矢量磁位，单位为韦伯/米（Wb/m）。

## 3. 矢量磁位的计算

### a.线电流矢量磁位计算

规范条件：$\nabla\cdot\vec{A}=0$ 对线电流的情况：$\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\dfrac{Id\vec{l}'\times\hat{a}_R}{R^2}$

已知：$\nabla(\dfrac{1}{R})=-\dfrac{\hat{a}_R}{R^2}$ $\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}(-Id\vec{l}')\times\nabla(\dfrac{1}{R})$

利用矢量恒等式: $\nabla\times(f\vec{G})=\nabla f\times\vec{G}+f\nabla\times\vec{G}$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}(-I\mathrm{d}\vec{l}')\times\nabla(\frac{1}{R})$$

为零!

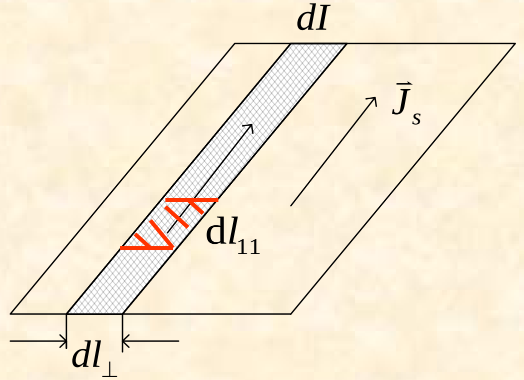
$$\nabla\times(\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'}{R})=\nabla(\frac{1}{R})\times I\mathrm{d}\vec{l}'+\frac{1}{R}\nabla\times I\mathrm{d}\vec{l}'$$

则: $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\nabla\times(\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'}{R})$ $\longrightarrow$ $\vec{B}=\nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}(\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'}{R})$

矢量磁位: $\boxed{\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'}{R}}$

该式为线电流产生的磁场中的矢量磁位计算公式。

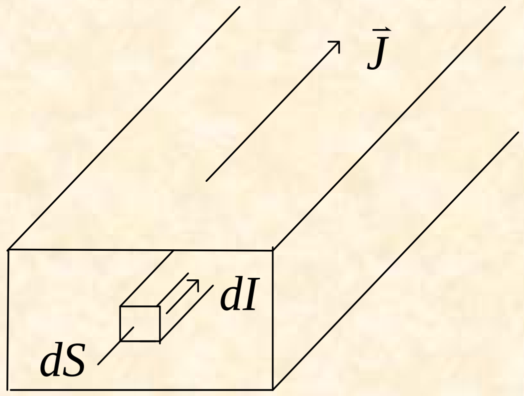
## b.面电流矢量磁位计算




面电流密度： $\vec{J}_S = \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l_\perp}\hat{a}_I$　(A/m)

矢量磁位： $\boxed{\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\dfrac{\vec{J}_S}{R}\mathrm{d}S'}$

## c.体电流矢量磁位计算

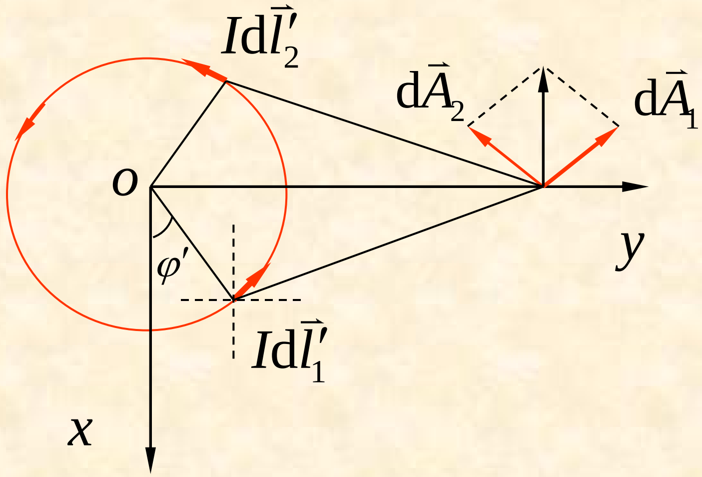



体电流密度： $\vec{J} = \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}\hat{a}_I$　(A/m²)

矢量磁位： $\boxed{\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\dfrac{\vec{J}}{R}\mathrm{d}V'}$

例8：试求电流为*I*, 半径为*a* 的小圆环在远离圆环处的磁感应强度。

解：先求 $\vec{A}$ 再求 $\vec{B}$ ，选用球坐标系，




已知：
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'} \frac{I\mathrm{d}\vec{l}'}{R'}$$

$$I\mathrm{d}\vec{l}' = Ia\,\mathrm{d}\varphi' \hat{a}_{\varphi'}$$

在直角坐标系中

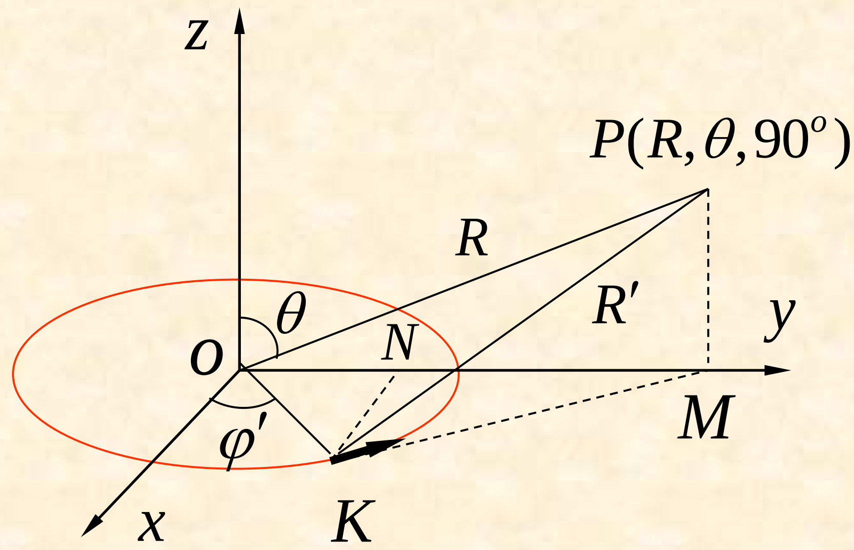
$$I\mathrm{d}\vec{l}_1' = Ia\,\mathrm{d}\varphi'\left(-\hat{a}_x \sin\varphi' + \hat{a}_y \cos\varphi'\right)$$

$$I\mathrm{d}\vec{l}_2' = Ia\,\mathrm{d}\varphi'\left(-\vec{a}_x \sin\varphi' - \vec{a}_y \cos\varphi'\right)$$

所以：

$$I\mathrm{d}\vec{l}_1' + I\mathrm{d}\vec{l}_2' = -2Ia\sin\varphi'\mathrm{d}\varphi'\hat{a}_x = 2Ia\sin\varphi'\mathrm{d}\varphi'\hat{a}_\varphi$$

如图： $R'^2 = PM^2 + MK^2$




其中： $PM^2 = (R\cos\theta)^2$

$$MK^2 = NK^2 + NM^2$$
$$= (a\cos\varphi')^2 + (R\sin\theta - a\sin\varphi')^2$$
$$= a^2 + (R\sin\theta)^2 - 2aR\sin\theta\sin\varphi'$$

可得： $R'^2 = R^2 + a^2 - 2aR\sin\theta\sin\varphi'$

当： $R \gg a \longrightarrow R' = R[1 - \frac{2a}{R}\sin\theta\sin\varphi']^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}(1 + \frac{a}{R}\sin\theta\sin\varphi')$$

将: $I\mathrm{d}\vec{l}_1' + I\mathrm{d}\vec{l}_2' = 2Ia\sin\varphi'\mathrm{d}\varphi'\hat{a}_\varphi$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\left(1+\frac{a}{R}\sin\theta\sin\varphi'\right)$$

$$\longrightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'}{R'}$$

得:
$$\vec{A} = \hat{a}_\varphi\frac{2\mu_0 Ia}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{R}\left(1+\frac{a}{R}\sin\theta\sin\varphi'\right)\sin\varphi'\mathrm{d}\varphi' = \hat{a}_\varphi\frac{\mu_0 SI}{4\pi R^2}\sin\theta$$

式中 $S=\pi a^2$为圆环的面积。 小电流环的磁矩: $\vec{m} = IS\hat{a}_n$

因为 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，最后得:

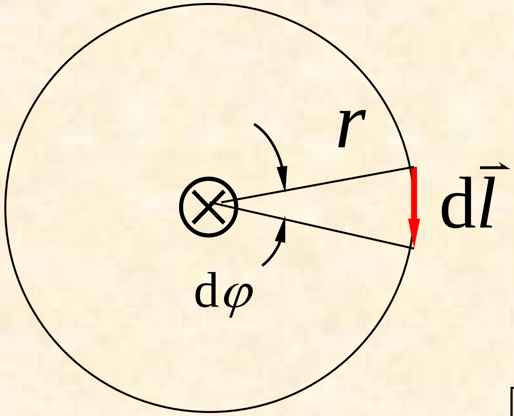
$$\vec{B} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & R\hat{a}_\theta & R\sin\theta\hat{a}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & 0 & R\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 SI}{4\pi R^3}\left(2\cos\theta\hat{a}_R + \sin\theta\hat{a}_\theta\right)$$

# 二. 麦克斯韦方程组的建立

## (一)安培环路定律——麦克斯韦第一方程

### 1. 安培环路定律

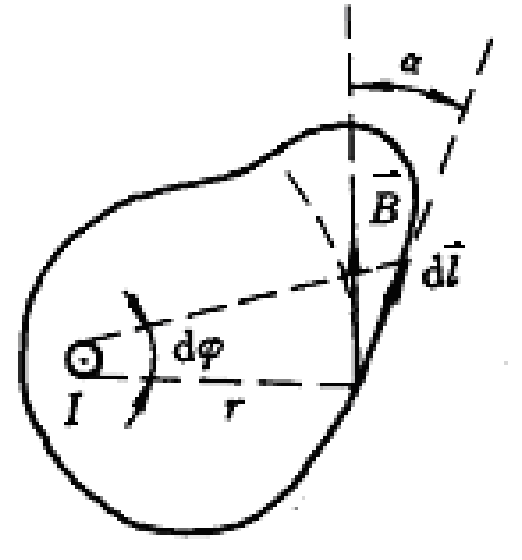
已知：无限长载流直导线周围的磁感应强度为：




$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{a}_\varphi$$

$$\mathrm{d}\vec{l} = r\mathrm{d}\varphi\hat{a}_\varphi$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}(\hat{a}_\varphi\cdot\hat{a}_\varphi)r\mathrm{d}\varphi = \mu_0 I$$




$$r\mathrm{d}\varphi = \cos\alpha \mathrm{d}l = \hat{a}_{\varphi}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \oint_l \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_{\varphi}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\mathrm{d}\varphi = \mu_0 I$$

若积分回路中包含多个电流则：

$$\oint_l \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\sum_{i=1}^{N} I_i$$

引入一个新矢量 $\vec{H}$，令 $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ 则： $\oint_l \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} I_i$

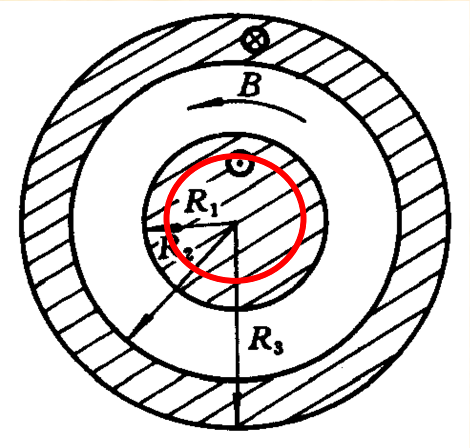
矢量 $\vec{H}$ 称为磁场强度，单位为安培/米（A/m）。

**安培环路定律：**

在真空中，磁场强度沿任意回路的线积分，等于该回路所限定的曲面上穿过的总电流。

例9: 如图所示，一无限长同轴电缆芯线通有均匀分布的电流$I$，外导体通有均匀的等量反向电流，求各区域的磁感应强度。

解: 根据题意，取圆柱坐标系。




(1) $r < R_1$ 区域

内导体的电流密度为: $\vec{J}_1 = \hat{a}_z I / \pi R_1^2$

取半径为 $r$ 的圆环为积分回路，

根据安培环路定律:

$$\oint_l \vec{H}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \vec{J}_1 \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \hat{a}_z$$

$$\mathrm{d}\vec{l} = r\mathrm{d}\varphi \hat{a}_\varphi$$

$$\oint_l \vec{H}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H_{1\varphi} \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\varphi = 2\pi r H_{1\varphi}$$

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{I}{\pi R_1^2} \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{I}{R_1^2} r^2$$

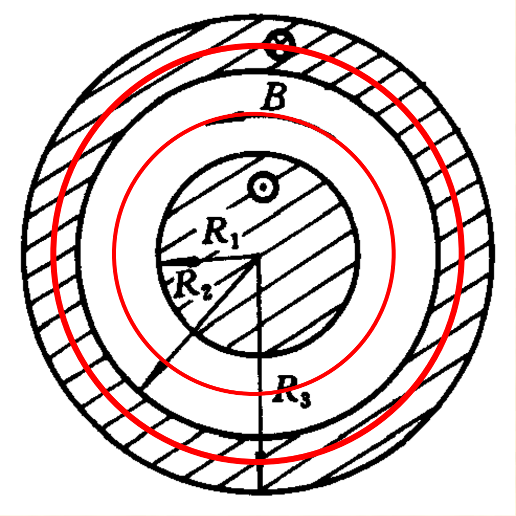
$$2\pi r H_{1\varphi} = \frac{I}{R_1^2} r^2 \longrightarrow \vec{H}_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2} \hat{a}_\varphi$$

磁感应强度为:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} \hat{a}_\varphi$$

(2) $R_1 < r < R_2$ 区域

同理取半径为 $r$ 的圆为积分回路，则有:




$$\oint_l \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = I$$

$$\oint_l \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = 2\pi r H_{2\varphi}$$

$$\longrightarrow \vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

该区域的磁感应强度为: $\vec{B}_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$

(3) $R_2 < r < R_3$ 区域

外导体的电流密度为: $\vec{J}_2 = -\hat{a}_z I/\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)$

同理，取半径为 $r$ 的圆为积分回路，则有:

$$\int_0^{2\pi} H_{3\varphi} r d\varphi = I - \int_{R_2}^{r}\int_0^{2\pi} J_2 r dr d\varphi$$

可得: $\vec{H}_3 = \dfrac{I(R_3^2 - r^2)}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)r}\hat{a}_\varphi$　　$\vec{B}_3 = \dfrac{\mu_0 I(R_3^2 - r^2)}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)r}\hat{a}_\varphi$

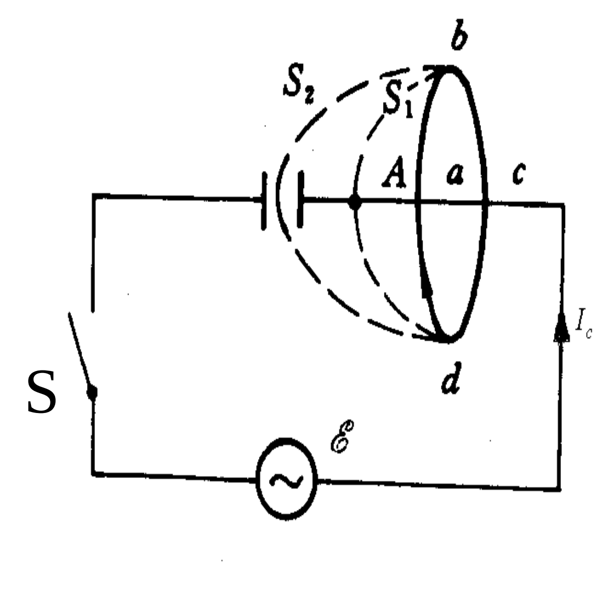
(4) $r > R_3$ 区域

$$\vec{B}_4 = 0$$

## 2. 位移电流

传导电流连续是安培环路定律成立的前提。

如图：




穿过 $S_1$ 的传导电流为 $I_C$，则：

$$\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_C$$

穿过 $S_2$ 的传导电流为 0 ，则：

$$\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

矛盾?

**位移电流的提出：**

在电容器两极板间，由于电场随时间的变化而存在位移电流，其数值等于流向正极板的传导电流。

## 位移电流的计算

传导电流： $I_C = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

平板电容器极板上的电荷： $q = CV = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d} Ed = \varepsilon_0 ES$

位移电流： $I_d = I_C = \dfrac{\mathrm{d}\left(\varepsilon_0 E\right)}{\mathrm{d}t} S$

位移电流密度： $J_d = \dfrac{I_d}{S} = \dfrac{\mathrm{d}(\varepsilon_0 E)}{\mathrm{d}t}$

引入一个新矢量 $\vec{D}$ ，在真空中令 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ，

则位移电流密度表示为： $\vec{J}_d = \dfrac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}$ ⟶ 电位移矢量

某曲面上的位移电流： $I_d = \int_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

# 3. 全电流定律

引入位移电流之后，穿过 $S$ 面的总电流为： $I = I_{\mathrm{C}} + I_{\mathrm{d}}$

总电流密度为： $\vec{J} = \vec{J}_{\mathrm{C}} + \vec{J}_{\mathrm{d}} = \vec{J}_{\mathrm{C}} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

某曲面上全电流 $I$ 为： $I = \int_S (\vec{J}_{\mathrm{C}} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

全电流定律： $\boxed{\oint_l \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\vec{J}_{\mathrm{C}} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$

—— 该方程称为麦克斯韦第一方程。

该式的物理意义：它表明磁场不仅由传导电流产生，也能由随时间变化的电场，即位移电流产生。

## （二）法拉第电磁感应定律——麦克斯韦第二方程

### 1. 法拉第电磁感应定律

磁场中的一个闭合导体回路的磁通量发生变化时，回路中就产生了感应电流，表示回路中感应了电动势，且感应电动势的大小正比于磁通对时间的变化率 。

数学表达式为： $\mathcal{E}_{in} = -\dfrac{d\psi}{dt}$

闭合回路中的磁通量为： $\psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

该闭合回路中的感应电动势为： $\mathcal{E}_{in} = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$

可得： $\boxed{\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}$

## 引起磁通变化的原因：

(1) 闭合回路是静止的，但与之交链的磁场是随时间变化的，这是回路中产生的感应电动势称为感生电动势。

$$\mathcal{E}_{\mathrm{in}}=-\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

(2) 闭合回路与恒定磁场之间存在相对运动,这时回路中的感应电动势称为动生电动势。

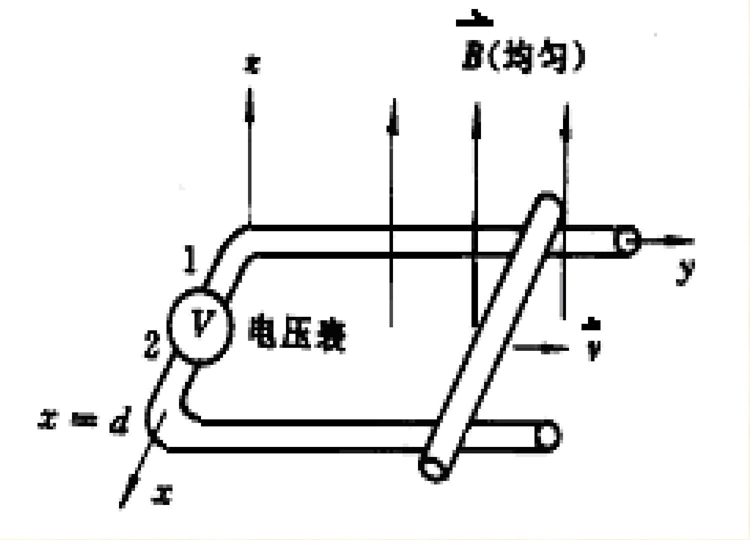
$$\mathcal{E}_{\mathrm{in}}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_s \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

(3) 既存在时变磁场又存在回路的相对运动，则总的感应电动势为：

$$\mathcal{E}_{\mathrm{in}}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_s \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

例10: 如图所示，一个矩形金属框的宽度$d$是常数，其滑动的一边以匀速$v$向右移动，求：下列情况下线框里的感应电动势。

（1）$\vec{B}$ 恒定均匀；（2）$\vec{B} = B_0 \sin(\omega t)\hat{a}_z$ 。




解：（1）已知 $\mathcal{E}_{\text{in}} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^d \int_0^{y_0+vt} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

其中：$\vec{B} = B_0 \hat{a}_z$　　$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\hat{a}_z$

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^d \int_0^{y_0+vt} B_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\partial}{\partial t}[B_0 d(y_0+vt)] = -B_0 d v$$

（2）已知 $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t)\hat{a}_z$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{in}} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^d \int_0^{y_0+vt} B_0 \sin(\omega t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}[B_0 \sin(\omega t) d(y_0 + vt)]$$

$$= -B_0 \omega \cos(\omega t) d(y_0 + vt)\hat{a}_z - B_0 \sin(\omega t) dv$$

## 2. 法拉第电磁感应定律的推广

当空间某曲面内的磁通随时间变化时，意味着空间存在着感应电场，感应电场沿曲面边界的积分为该曲线上的感应电动势。

经麦克斯韦推广的电磁感应定律为：

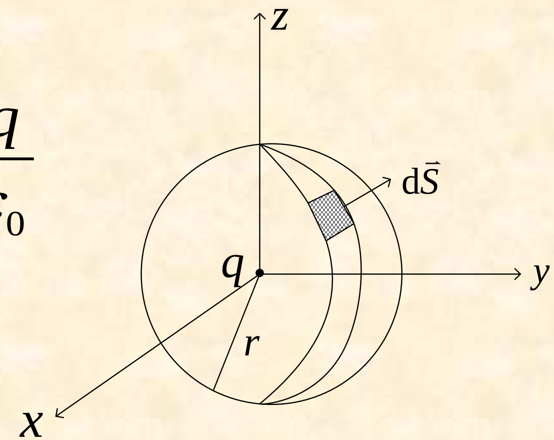
$$\boxed{\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

——— 该方程称为麦克斯韦第二方程。

该式说明：变化的磁场产生电场。即电场不仅由电荷源产生，也可由时变的磁场产生。

## (三)电场的高斯定律——麦克斯韦第三方程

若以该点电荷为中心，做一半径为$R$ 的球面，则电场强度穿出该球面的通量为




$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R\cdot\hat{a}_R R^2\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

如果闭合曲面内包含$n$个点电荷，则：

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

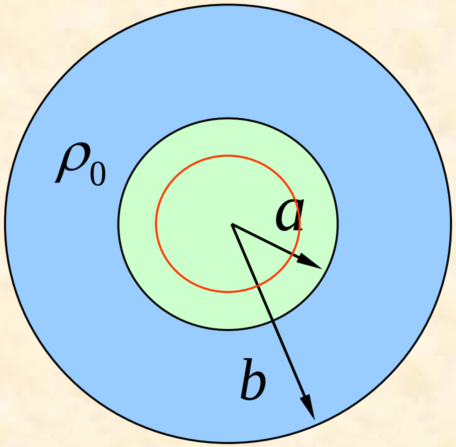
如果闭合曲面内含有连续分布的电荷，则：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_V dV$

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho_V dV}$$

——该方程称为麦克斯韦第三方程。

该式表明：穿过任何闭合曲面的电通量等于该闭合曲面所包围的净电荷。

例11：一均匀带电球壳，电荷密度为 $\rho_0$ ，球壳内外半径分别为$a$、$b$，求各区域中的电位移矢量 $\vec{D}$ 。




解：如图，选球坐标系，由于球壳内均匀带电，所产生的电场具有中心对称性。

（1）$R<a$ 区域

取半径为 $R$ 的球面为高斯面，根据电高斯定律:

$$\oint_S \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V$$

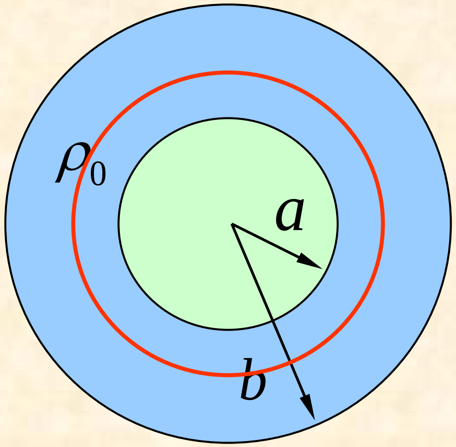
$$\oint_S \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \vec{D}_1 \cdot R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \hat{a}_R = D_{1R} 4\pi R^2 = 0$$

可得： $\vec{D}_1 = 0$

(2) $a<R<b$ 区域

取半径为 $R$ 的球面为高斯面，

根据电高斯定律:



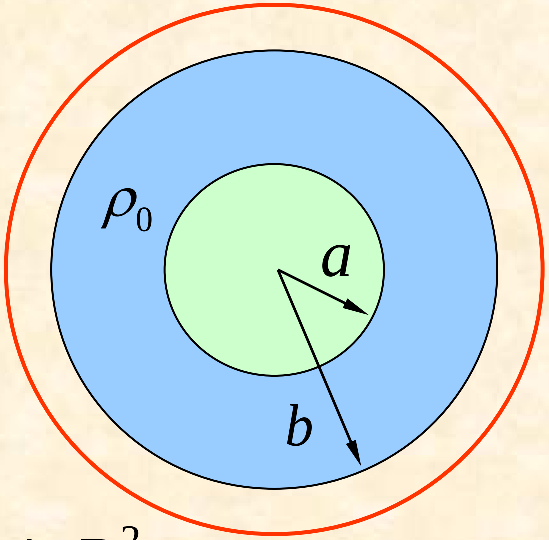

$$\oiint_S \vec{D}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V$$

$$\oiint_S \vec{D}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S \vec{D}_2 \cdot R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \hat{a}_R = D_{2R} 4\pi R^2$$

$$\int_V \rho_V \mathrm{d}V = \rho_0 (\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi a^3) = \frac{4}{3}\pi \rho_0 (R^3 - a^3)$$

可得: $$\vec{D}_2 = \frac{\rho_0 (R^3 - a^3)}{3R^2} \hat{a}_R$$

(3) $R>b$ 区域




同理取半径为 ***R*** 的球面为高斯面，

根据电高斯定律:

$$\oint_S \vec{D}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V$$

$$\oint_S \vec{D}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \vec{D}_3 \cdot R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \hat{a}_R = D_{3R} 4\pi R^2$$

$$\int_V \rho_V \mathrm{d}V = \rho_0\left(\frac{4}{3}\pi b^3 - \frac{4}{3}\pi a^3\right) = \frac{4}{3}\pi\rho_0(b^3 - a^3)$$

可得: $$\vec{D}_3 = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3R^2}\hat{a}_R$$

## (四)磁场的高斯定律——麦克斯韦第四方程

数学表达式为：

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

——该方程称为麦克斯韦第四方程。

该式表明：

通过任何闭合曲面的磁通量恒为零。磁力线总是连续的，它不会在闭合曲面内积累或中断，故称磁通连续性原理。

## (五)电流连续性方程——麦克斯韦第五方程

该封闭曲面内的总电荷为：$Q=\int_V \rho_V \mathrm{d}V$

设流出封闭曲面的电流为：$I_{\mathrm{C}}=\oint_S \vec{J}_{\mathrm{C}}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

从封闭曲面流出的电流，必然等于封闭曲面内正电荷的减少率：

$$I_{\mathrm{C}}=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

则：

$$\boxed{\oint_S \vec{J}_{\mathrm{C}}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=-\int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t}\mathrm{d}V}$$

——该方程称为麦克斯韦第五方程。

该式表明：

从封闭曲面流出的电流，必然等于封闭曲面内正电荷的减少率，反之亦然。

# 三、麦克斯韦方程组的积分形式和微分形式

## （一）麦克斯韦方程组的积分形式：

一般情况：

$$
\begin{cases}
\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\vec{J}_C + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V \\
\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\
\oint_S \vec{J}_C \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \dfrac{\partial \rho_V}{\partial t}\mathrm{d}V
\end{cases}
$$

无源的情况：$(\rho = 0, \vec{J}_c = 0)$

$$
\begin{cases}
\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\
\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0
\end{cases}
$$

**恒定电磁场（存在直流电流）**

$$
\begin{cases}
\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}_C \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \\
\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V \\
\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0
\end{cases}
$$

**正弦电磁场（存在时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$）**

$$
\begin{cases}
\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\vec{J}_C + \mathrm{j}\omega\vec{D})\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{j}\omega\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V \\
\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0
\end{cases}
$$

**注意：利用积分形式的麦克斯韦方程可直接求解具有对称性的场。**

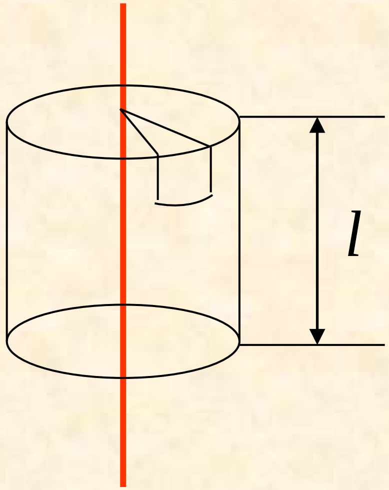
**如：中心对称性场，轴对称性场，平面对称性场。**

例12：一无限长均匀带电直导线，线电荷密度为 $\rho_l$，

求：该导线周围的电场强度。

解：该导线周围的电场具有轴对称性，

选柱坐标系，高斯面选柱面。




$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V = Q$$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^l \int_0^{2\pi} D_r r\mathrm{d}\varphi \mathrm{dz} = D_r 2\pi r l$$

$$Q = \rho_l l$$

可得：$\vec{D} = \dfrac{\rho_l}{2\pi r}\hat{a}_r$　　已知：$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

电场强度：$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{a}_r$$

## （二）麦克斯韦方程组的微分形式

积分形式:

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_V dV$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_S \vec{J}_C\cdot d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV$$

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{H})\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{D} dV$$

微分形式:

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_V$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{J}_C = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$$

微分形式的麦克斯韦方程组给出了空间某点场量之间及场量与场源之间的关系。

注意：麦克斯韦方程的微分形式只适用于媒体的物理性质不发生突变的区域。

例13： 已知自由空间磁感应强度为 $\vec{B}=33\times10^{-12}\cos(3\times10^{9}t-10z)\hat{a}_y$

(1)求位移电流密度 $\vec{J}_\mathrm{d}$；

(2)若 $t=0, z=1.1$m时，$\vec{E}=0$ ，求 $t=1$ ms时，$z=9$ km处的电场强度。

解：(1)按题意，空间无传导电流，故：$\nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{J}_\mathrm{d}$

$$\vec{J}_\mathrm{d}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & B_y & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\mu_0}[-\hat{a}_x\frac{\partial B_y}{\partial z}+\hat{a}_z\frac{\partial B_y}{\partial x}]$$

$$=-\frac{330\times10^{-12}}{\mu_0}\sin(3\times10^{9}t-10z)\hat{a}_x$$

$$=-2.626\times10^{-4}\sin(3\times10^{9}t-10z)\hat{a}_x \qquad (\mathrm{A/m^2})$$

(2)由 $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_\mathrm{d}$ 得: $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{\vec{J}_d}{\varepsilon_0} = \dfrac{-2.626\times10^{-4}\sin(3\times10^9 t - 10z)\hat{a}_x}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E} = \int -\frac{2.626\times10^{-4}}{\varepsilon_0}\sin(3\times10^9 t - 10z)\mathrm{d}t\hat{a}_x$$

$$= \frac{2.626\times10^{-4}}{3\times10^9\varepsilon_0}\cos(3\times10^9 t - 10z)\hat{a}_x + C$$

$$= 9.90\times10^{-3}\cos(3\times10^9 t - 10z)\hat{a}_x + C$$

若 $t = 0, z = 1.1$ m时, $\vec{E} = 0$ ,则: $C = 0$

所以: $\vec{E} = 9.90\times10^{-3}\cos(3\times10^9 t - 10z)\hat{a}_x$ (mV/m)

当 $t = 1$ ms时, $z = 9$ km处的电场强度:

$$\vec{E} = 9.90\times10^{-3}\cos(3\times10^9\times10^{-3} - 10\times9\times10^3)\vec{a}_x = 7.401\times10^{-3}\hat{a}_x \quad \text{(mV/m)}$$

麦克斯韦方程组包含着丰富的内容和深刻的含义。伟大的物理学家爱因斯坦曾这样评价麦克斯韦方程：

"这个方程组的提出是牛顿时代以来物理学上一个重要的事情，这是关于场定律的定量的描述。方程中所包含的内容比我们所指出的要丰富得多。在它们简单的形式下隐藏着深奥的内容。这些内容只有靠仔细的研究才能显示出来。它是描述场的结构的定律，它不像牛顿定律那样把此处发生的事件与彼处的条件联系起来，而是此处此刻的场只与最近的刚过去的场发生关系。假使我们知道此处此刻所发生的事件，这些方程便可帮助我们预测在空间上稍远一些，在时间上稍迟一些将会发生什么。"